

## 67. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2025/2026

kategória D

riešenie úloh domácej prípravy

### 1. úloha - Eskalátor

Riešenie:

- a) Výška schodišťa  $H = n h_1 = 7,0$  m a stojaci Ľubo stúpa vo zvislom smere rýchlosťou  $v_1 = H/t_1 = 0,35$  m/s.

Keďže rýchlosť eskalátora sa nemení, za čas  $t_1$  prejde dolným koncom  $n$  schodov. Za čas  $t_2$  prejde dolným koncom  $n_1$  schodov, pričom platí

$$\frac{n_1}{t_2} = \frac{n}{t_1}, \text{ a teda } n_1 = n \frac{t_2}{t_1},$$

Zvyšok  $\Delta n = n - n_1$  Ľubo na schodišti vystúpi sám nahor, tzn.

$$\Delta n = n \left( 1 - \frac{t_2}{t_1} \right) = 14. \quad 3 \text{ b}$$

Na jeden schod vystúpi za čas

$$\tau = \frac{t_2}{\Delta n} = \frac{1}{n} \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 0,62 \text{ s.} \quad 1 \text{ b}$$

- b) Za jeden cyklus (2 schody nahor za čas  $2\tau$  a jeden nadol za čas  $k\tau$ ) vystúpi Ľubo o výškový rozdiel

$$h_2 = h_1 + v_1 (2+k) \tau.$$

Priemerná rýchlosť stúpania

$$v_2 = \frac{h_2}{(2+k) \tau}.$$

Výškový rozdiel  $H$  prekoná za čas

$$t_3 = \frac{H}{v_2} = \frac{(2+k) t_2 t_1}{t_1 + (1+k) t_2} = 14 \text{ s.} \quad 3 \text{ b}$$

- c) Za čas jedného cyklu (jen schod hore  $\tau$  a dva nadol  $2\tau$ ) vystúpi Ľubo o výšku

$$\Delta h_2 = v_1 (1+2k) \tau - h_1.$$

Výšku eskalátora prekoná za čas

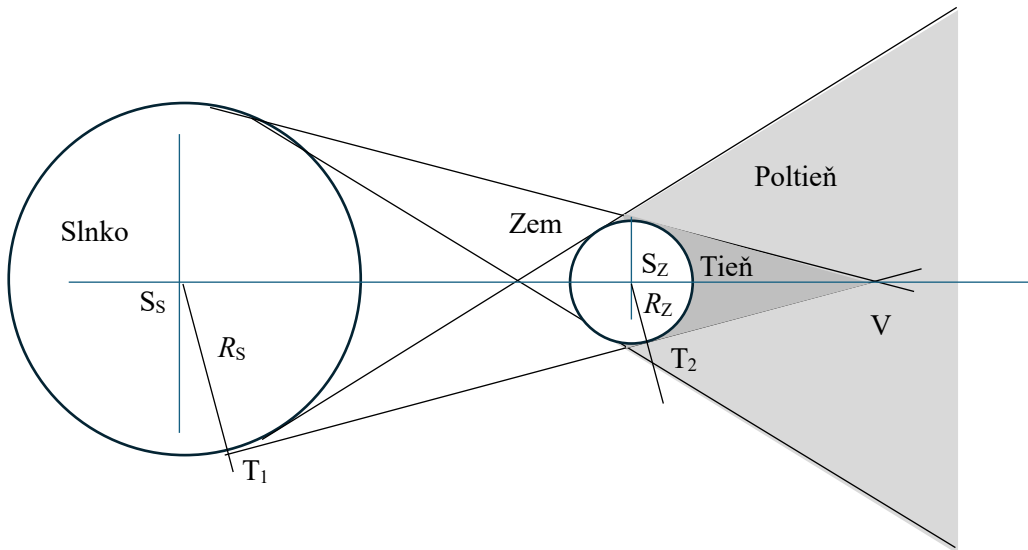
$$t_4 = \frac{H}{\Delta h_2} (1+2k) \tau = \frac{(1+2k) t_1 t_2}{2(1+k) t_2 - t_1} = 32 \text{ s.} \quad 3 \text{ b}$$

## 2. úloha - Zatmenie Mesiaca

Riešenie:

a) Tieň vzniká zatičením svetla zo Slnka.

obrázok 2 b



Ak označíme vzdialenosť  $d_1$  vrcholu V tieňa od stredu Zeme a  $d_{zs}$  vzdialenosť stredov Zeme a Slnka, dostávame z podobnosti trojuholníkov  $VS_zT_2$  a  $VS_sT_1$

$$\frac{d_1}{R_z} = \frac{d_1 + d_{zs}}{R_s}, \text{ odkiaľ máme } d_1 = d_{zs} \frac{R_z}{R_s - R_z}.$$

Vzdialenosť vrcholu tieňa od povrchu Zeme

$$d_v = d_1 - R_z = \left( \frac{d_{zs}}{R_s - R_z} - 1 \right) R_z.$$

Pre  $d_{zs} = 1,5 \times 10^8$  km,  $R_z = 6,4 \times 10^3$  km a  $R_s = 7,0 \times 10^5$  km dostávame  $d_v = 1,4 \times 10^6$  km.

Pre vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca  $d_{zm} = 3,8 \times 10^5$  km je vzdialenosť Mesiaca od povrchu Zeme  $d_m = d_{zm} - R_z = 3,7 \times 10^5$  km.

$$\text{Pomer vzdialeností } \frac{d_v}{d_m} = \frac{R_z}{d_{zm} - R_z} \left( \frac{d_{zs}}{R_s - R_z} - 1 \right) = 3,7.$$

Pre uhol  $\varphi_z$  platí

$$\sin \frac{\varphi_z}{2} = \frac{R_z}{d_1} = \frac{R_s - R_z}{d_{zs}}, \text{ odkiaľ } \varphi_z = 2 \arcsin \frac{R_s - R_z}{d_{zs}} = 0,53^\circ. \quad 2 \text{ b}$$

b) Keďže je uhol veľmi malý, môžeme  $\tan \varphi$  a  $\sin \varphi$  nahradiť priamo uhlom  $\varphi$  (v radiánoch).

Pre uhol  $\varphi_1$ , pod ktorým vidno plochu  $S_t$  zo stredu Zeme

$$\varphi_1 d_{zm} = \varphi_z (d_1 - d_{zm}), \text{ a teda } \varphi_1 = \varphi_z \frac{d_1 - d_{zm}}{d_{zm}} = \varphi_z \frac{(d_{zs} + d_{zm})R_z - d_{zm}R_s}{d_{zm}(R_s - R_z)} = 1,4^\circ. \quad 2 \text{ b}$$

Mesač s polomerom  $R_m = 1,7 \times 10^3$  km vidno zo stredu Zeme po uhlom

$$\varphi_m = 2 \frac{R_m}{d_{zm}} = 8,9 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0,51^\circ. \quad 1 \text{ b}$$

- c) Mesiac sa pohybuje okolo Zeme s uhlovou rýchlosťou  $\omega_M = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{T_M}$ , kde  $T_M = 29,53$  dňa je synodická doba obehu Mesiaca okolo Zeme vzhľadom na Slnko (od jedného splnu po nasledujúci). Od začiatku zatmenia až po ukončenie musí prejsť Mesiac uhol  $\varphi_1 + \varphi_M$  za čas  $t_1$ , pre ktorý platí

$$\omega_M t_1 = \varphi_1 + \varphi_M, \text{ a teda}$$

$$t_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_M}{2\pi} T_M = \frac{1}{2\pi} (1,4^\circ + 0,51^\circ) \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \left( 29,53 \text{ d} \times 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \right) = 3,76 \text{ h} = 3 \text{ h } 46 \text{ min} . \quad 2 \text{ b}$$

Pre dobu úplného zatmenia máme

$$t_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_M}{2\pi} T_M = \frac{1}{2\pi} (1,4^\circ - 0,51^\circ) \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \left( 29,53 \text{ d} \times 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \right) = 1,75 \text{ h} = 1 \text{ h } 45 \text{ min} . \quad 1 \text{ b}$$

Pozn.: Dňa 7.9.2025 zatmenie začalo 18:27 a skončilo sa 21:56, tzn. 3 h 29 min. Úplné zatmenie trvalo od 19:31 do 20:53, tzn. 1 h 22 min. Tieto časy sa dobre zhodujú s vypočítanými.

### 3. úloha - Sústava telies spojených vláknom

Riešenie:

- a) Medzi A a B pôsobí sila trenia  $F_{AB}$ . Ak je trenie statické,  $F_{AB} \leq f m_2 g$ , telesá A a B sa pohybujú spoločne ako jedno teleso so zrýchlením

$$a_1 = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} .$$

Sila statického trenia uvádza dosku A s hmotnosťou  $m_1$  do pohybu, takže

$$F_{AB} = m_1 a_1 = \frac{m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} \leq f m_2 g ,$$

odkiaľ

$$m_3 \leq \frac{f m_2 (m_1 + m_2)}{m_1 - f m_2} = m_{3k} = 18 \text{ g} .$$

Teleso B sa bude prešmykovať po povrchu dosky A, ak  $m_3 > m_{3k}$ . 3 b

- b) Existujú dva rôzne stavy.

- i. Pre  $m_3 \leq m_{3k}$  trenie medzi A a B je statické a telesá A a B sa pohybujú spoločne ako jedno teleso s hmotnosťou  $m_1 + m_2$ . V tomto prípade je ťahová sila vlákna

$$F_v = (m_1 + m_2) a_1 = (m_1 + m_2) \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} . \quad 2 \text{ b}$$

- ii. Pre  $m_3 > m_{3k}$  trenie medzi A a B je šmykové  $F_{AB} = f m_1 g$ . V tom prípade pôsobí na teleso B výsledná sila  $F_v - F_{AB}$  a udeľuje mu zrýchlenie

$$a_2 = \frac{m_3 g - f m_1 g}{m_2 + m_3} .$$

Pre teleso B tak máme pohybovú rovnicu

$$F_v - f m_1 g = m_2 a_2, \text{ odkiaľ } F_v = (1 + f) \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} g . \quad 2 \text{ b}$$

Iná možnosť určiť ťahovú silu na teleso C

$$m_3 g - F_v = m_3 a_2, \text{ odkiaľ } F_v = \frac{(1+f) m_2 m_3}{m_2 + m_3} g, \text{ čo je rovnaký výsledok.}$$

c) Opäť musíme rozlíšiť dva prípady.

i. Pre  $m_3 \leq m_{3k}$  (statické trenie) sa celá sústava troch telies pohybuje s rovnakým zrýchlením  $a_1$ .

Na dráhe  $h$  tak získa rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2 h a_1} = \sqrt{2 h g} \sqrt{\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}}. \quad 1 \text{ b}$$

ii. Ak  $m_3 > m_{3k}$  sa telesá B a C spoločne pohybujú so zrýchlením  $a_2$ , a teda teleso C dosiahne rýchlosť

$$v_2 = \sqrt{2 h a_2} = \sqrt{2 h g} \sqrt{\frac{m_3 - f m_2}{m_2 + m_3}}. \quad 1 \text{ b}$$

Teleso A sa pohybuje pod účinkom sily šmykového trenia s telesom B, a má tak zrýchlenie

$$a_3 = \frac{f m_2 g}{m_1}.$$

Na dráhe  $h$  tak dosiahne rýchlosť

$$v_3 = \sqrt{2 h a_3} = \sqrt{2 h g} \sqrt{f \frac{m_2}{m_1}}. \quad 1 \text{ b}$$

#### 4. úloha - Sokol

Riešenie:

a) Ak je pohyb sokola rovnomerný, sú zrýchlenie, a teda aj výsledná sila, nulové. Tiažová sila teda musí byť v rovnováhe so silou odporu vzduchu. Pre rovnomerný pád sokola tak platí

$$m g = \frac{1}{2} c S_k \rho v^2, \text{ odkiaľ máme } c = \frac{2 m g}{S_k \rho v^2} = 0,04. \quad 3 \text{ b}$$

Sokol sa pri strmhlavom lete „zbalí“ do tvaru, ktorý má aerodynamický odpor väčší ako stíhačka ale podstatne menší ako letiaci vták.

b) Cyklista musí prekonávať odpor vzduchu

$$F_o = \frac{1}{2} c_B S_k \rho v^2.$$

Mechanický výkon

$$P = F_o v = \frac{1}{2} c_B S_k \rho v^3, \text{ odkiaľ } v = \sqrt[3]{\frac{2 P_f m_C}{c_B S_k \rho}} = 10,5 \text{ m/s} = 37,8 \text{ km/h}. \quad 3 \text{ b}$$

c) V prípade voľného pádu bez odporu vzduchu by nepôsobili straty energie a kinetická energia by bola rovná poklesu potenciálnej energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g h, \text{ odkiaľ } v_0 = \sqrt{2 g h} = 99 \text{ m/s} = 356 \text{ km/h}.$$

Je rýchlosť strely vystrelenej z guľovnice.

V skutočnosti kvapky padajú z veľkej výšky rovnomerným ustáleným pohybom. Výsledná sila, ktorá pôsobí na kvapku je preto nulová, tzn. tiažová sila je rovná sile odporovej.

$$mg = \frac{1}{2} c_G S_k \rho v^2, \text{ kde } m = \rho_v V = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho_v \text{ a } S_k = \frac{1}{4} \pi d^2 \text{ (kolmý priemet je kruh),}$$

kde  $\rho_v = 1\,000 \text{ kg/m}^3$  je hustota vody.

Odtiaľ dostávame

$$v = \sqrt{\frac{4 d \rho_v g}{3 c_G \rho}}.$$

Pre  $d_1$  je rýchlosť dopadu  $v_1 = 8,0 \text{ m/s} = 29 \text{ km/h}$ , pre  $d_2$  je to  $v_2 = 1,5 \text{ m/s} = 5,2 \text{ km/h}$ . 4 b

## 5. úloha - Plávajúca skúmavka

Riešenie:

- a) Aby skúmavka s pieskom plávala, musí byť ťažisko  $T_2$  skúmavky bližšie ku dnu ako stred  $T_1$  ponorenej časti skúmavky (pôsobisko vztlakovej sily). Označíme dĺžky podľa obrázku.

Ťažisko skúmavky je vo vzdialenosti  $L/2$  od dna skúmavky a ťažisko piesku v polovici výšky stĺpca piesku  $h_1/2$ . Ťažisko skúmavky s pieskom je vo výške

$$h_{T_2} = \frac{1}{m_s + m_p} \left( m_s \frac{\ell_s}{2} + m_p \frac{h_p}{2} \right),$$

$$\text{kde } m_p = \frac{\pi d_s^2}{4} h_p \rho_p.$$

Z podmienky stability plávania skúmavky zvislo

$$h_{T_2} < \frac{h}{2}, \text{ kde hĺbku ponorenia vyjadríme pomocou}$$

Archimedovho zákona

$$\frac{\pi d_s^2}{4} h \rho_v = m_s + m_p \quad (1)$$

dostávame nerovnicu

$$m_p^2 + 2m_s \frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_v} m_p - \left( \frac{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v}{4m_s} - 1 \right) \frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_v} m_s^2 > 0.$$

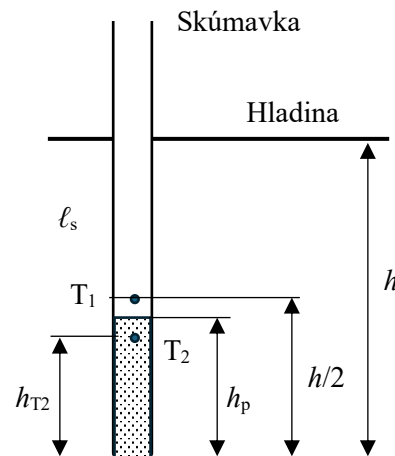
Kvadratický výraz na ľavej strane má dva korene, a môžeme ho vyjadriť v tvare

$$(m_p - m_p^+) (m_p - m_p^-) > 0,$$

kde

$$m_p^\pm = -m_s \frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_v} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \left( \frac{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v}{4m_s} - 1 \right) \frac{\rho_p - \rho_v}{\rho_p}} \right), \text{ pričom } m_p^+ < 0 \text{ a } m_p^- > 0,$$

a teda nerovnosť je splnená pre



$$m_p > m_p^- = m_s \frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_v} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v}{4 m_s} - 1 \right) \frac{\rho_p - \rho_v}{\rho_p}} - 1 \right) = m_{pm} = 28,7 \text{ g.}$$

V medznom prípade

$$\frac{\pi d_s^2}{4} h \rho_v = m_s + m_{pm}, \text{ odkiaľ}$$

$$p_m = \frac{h_m}{\ell_s} = \frac{4}{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v} (m_s + m_{pm}) = \frac{4 m_s}{\pi d_s^2 \ell_s (\rho_p - \rho_v)} \left( \frac{\rho_p}{\rho_v} \sqrt{1 + \left( \frac{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v}{4 m_s} - 1 \right) \frac{\rho_p - \rho_v}{\rho_p}} - 1 \right).$$

Pre dané hodnoty  $p_m = 37,2\%$ .

4 b

b) Pomer ponorenia  $p_1 = h_1 / \ell_s$ . S použitím vzťahu (1) dostávame

$$m_{p1} = \frac{\pi d_s^2}{4} h \rho_v - m_s = \frac{\pi d_s^2}{4} p_1 \ell_s \rho_v - m_s .$$

Pre  $p_1 = 0,60$  máme  $m_{p1} = 51,1 \text{ g}$ .

2 b

c) Ak je skúmavka polovicou dĺžky vo vode a dĺžkou  $h_0$  v oleji, podľa Archimedovho zákona máme

$$(h_0 \rho_o + p_2 \ell_s \rho_v) \frac{\pi d_s^2}{4} g = (m_s + m_{p1}) g ,$$

odkiaľ dostávame

$$h_0 = \frac{4}{\pi d_s^2 \rho_o} (m_s + m_{p1}) - p_2 \ell_s \frac{\rho_v}{\rho_o} = (p_1 - p_2) \ell_s \frac{\rho_v}{\rho_o} = 2,2 \text{ cm.}$$

2 b

d) Ak dosypeme piesok s hmotnosťou  $\Delta m_p$ , je skúmavka ponorená dĺžkou  $\ell_s - h_0$  vo vode a zvyškom  $h_0$  dĺžky v oleji. Pritom platí

$$\left[ h_0 \rho_o + (\ell_s - h_0) \rho_v \right] \frac{\pi d_s^2}{4} g = (m_s + m_{p1} + \Delta m_p) g .$$

Hmotnosť pridaného piesku

$$\Delta m_p = \left[ h_0 \rho_o + (\ell_s - h_0) \rho_v \right] \frac{\pi d_s^2}{4} - (m_s + m_{p1}) .$$

Po dosadení a úprave

$$\Delta m_p = \left[ 1 - p_2 - (p_1 - p_2) \frac{\rho_v}{\rho_o} \right] \frac{\pi d_s^2 \ell_s \rho_v}{4} = 38,3 \text{ g.}$$

2 b

## 6. úloha - Fontána

Riešenie:

- a) Hladina poklesne v dôsledku toho, že pri striekaní fontány je určitý objem vody z jazierka vo vzduchu. Objem určíme tak, že objemový prietok  $Q$  dýzou vynásobíme časom, po ktorý voda po opustení dýzy zostane vo vzduchu. Voda sa vo vzduchu pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením  $g$  smerujúcim nadol (zvislý vrh nahor). Pre výšku a rýchlosť máme

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{a} \quad v = v_0 - g t.$$

Maximálnu výšku  $H$  (nulový rýchlosť) voda dosiahne za čas  $t_1$ , pre ktorý platí

$$H = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{a} \quad 0 = v_0 - g t_1.$$

Odtiaľ určíme rýchlosť  $v_0$  prúdu v dýze

$$v_0 = \sqrt{2gH} = 14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pozn.: Jednoduchší spôsob je určenie rýchlosti z podmienky zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g H.$$

Čas  $t_2$ , ktorý voda po opustení dýzy stráví vo vzduchu je daná podmienkou  $h = 0$

$$0 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2, \text{ odkiaľ } t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Za čas  $t_2$  prejde dýzou voda s objemom

$$V = Q t_2 = 2Q \sqrt{\frac{2H}{g}} = S \Delta y,$$

kde  $\Delta y$  je pokles hladiny v jazierku. Odtiaľ dostávame

$$\Delta y = \frac{2Q}{S} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 4,2 \text{ mm.}$$

3 b

Pokles hladiny je nebadateľný.

- b) Vyjadríme prietok vody dýzou

$$Q = S_d v_0 = \frac{\pi d_d^2}{4} \sqrt{2gH},$$

odkiaľ máme

$$d_d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{2gH}} = 3,7 \text{ cm.}$$

2 b

- c) Čerpadlo nasáva stojatú vodu z jazierka a zrýchli ju na rýchlosť  $v_0$ . Čerpadlo vykoná prácu rovnú zmene kinetickej energie. Výkon je práca vykonaná za jednotku času

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta t} v_0^2 = \frac{1}{2} \rho Q v_0^2 = \rho Q g H = 1,47 \text{ kW.}$$

2 b

- d) Určíme tlak vody v prívodnom potrubí. Podľa Bernoulliho rovnice pre laminárne prúdenie ideálnej kvapaliny máme

$$p_a = p_v + \frac{1}{2} \rho v_1^2, \text{ kde } S_v v_v = S_d v_0,$$

kde  $p_a$  je atmosférický tlak nad hladinou jazierka,  $p_v$  je tlak v potrubí,  $v_v$  je rýchlosť prúdenia v potrubí a  $S_v$  je prierez nasávacieho potrubia.

Tlak v prívodnom potrubí nemôže byť záporný

$$p_v = p_a - \frac{1}{2} \rho v_v^2 \geq 0.$$

Po dosadení a úprave

$$d_v \geq d_d \sqrt[4]{\frac{\rho v_0^2}{2 p_a}}, \text{ kde } Q = \frac{\pi d_d^2}{4} v_0, \text{ a ďalej}$$

$$d_v \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{2 p_a}} = 3,7 \text{ cm.}$$

3 b

Pri menšom priemere by začali vznikať vákuové bubliny, ktoré by spôsobili kavitáciu.

### 7. úloha - Meranie objemovej teplotnej rozťažnosti vody – experimentálna úloha

Podľa úrovne spracovania max. 10 b

---

#### Fyzikálna olympiáda – 67. ročník – úlohy domácej prípravy kat. D

Návrh a spracovanie úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp

Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025