

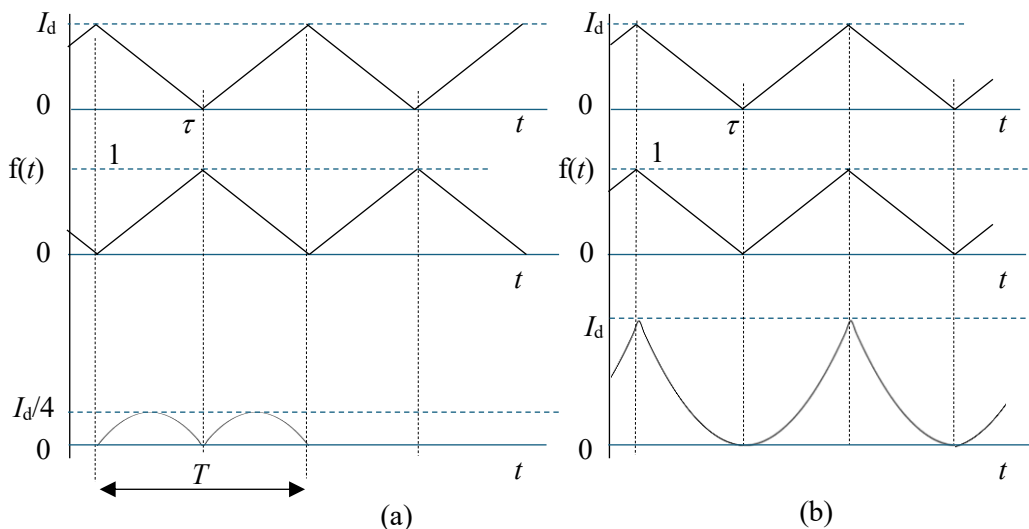
**67. ročník Fyzikálnej olympiády**  
 v školskom roku 2025/2026  
 kategória B  
 riešenie úloh domácej prípravy

**1. úloha - Rýchlosť svetla**

Riešenie:

- a) S periódou  $T=1/(nN)$  sa vysielajú smerom k zrkadlu Z svetelné impulzy, ktoré sa po odraze s oneskorením  $\tau = 2L/c$  vracajú k disku. Ten sa za čas  $\tau$  pootočí o uhol  $\varphi = \omega\tau = (2\pi n)\tau$ . Ak disk stojí, vráti sa impulz svetla do otvorenej štrbiny na obvodě disku. Ak sa začnú otáčky disku zvyšovať, nastane situácia, keď  $\varphi = \alpha_0$  a zub disku impulz zatieni. Pri ďalšom zvyšovaní otáčok nastane situácia pri otáčkach  $n_1$ , keď  $\varphi = \alpha_0 + \alpha_1$ , prechádza odrazený impulz svetla štrbinou na obvodě disku do detektora. Pri ďalšom zvyšovaní otáčok sa situácia pravidelne opakuje. Zmeraním otáčok  $n_1$  možno určiť rýchlosť svetla medzi diskom a zrkadlom. 2 b
- b) Predpokladajme, že disk sa otáča s frekvenciou  $n$ , tzn. uhlovou rýchlosťou  $\omega = 2\pi n$ . Medzera na disku sa tak odkrýva s periódou  $T = 2\pi/N\omega$ . Definujme čas  $t = 0$ , keď zub disku zakrýva štrbinu clony, takže svetlo vychádzajúceho k zrkadlu má nulovú intenzitu. Keď sa medzera na disku postupne odkrýva, intenzita prechádzajúceho svetla lineárne narastá, až kým nedosiahne maximum  $I_0$  za čas  $T/2$ , keď je celá medzera odkrytá. Potom sa medzera postupne zakrýva a intenzita svetla klesá k nule v čase  $T$ . Do priestoru sa tak vysielajú svetelné impulzy s trojuholníkovou časovou závislosťou intenzity vyjadrenou funkciou  $I = I_0 f(t)$ . Odrazený lúč sa vráti s oneskorením  $\tau$ , tzn. intenzita svetla dopadajúceho na medzeru v clone je daná funkciou  $I_d(t) = z f(t - \tau)$ , kde  $z$  je faktor zoslabenia lúča na vzdialenosti  $2L$ . Zub disku sa za tento čas natočí o uhol  $\varphi$ , ale funkcia začlonenia je aktuálne stále  $f(t)$  popisujúca trojuholníkový priebeh.

Intenzita svetla dopadajúceho na detektor je daná súčinom funkcií  $I_D(t) = f(t) I_d(t) = k f(t) \times f(t - \tau)$ .



Časový priebeh intenzity  $I_d$  lúča dopadajúceho na štrbinu clony a zodpovedajúceho otvorenia medzery na disku je pre prípady minimálnej (obr. a) a maximálnej (obr. b) na predchádzajúcich obrázkoch. Intenzita lúča dopadajúceho na detektor je daná súčinom týchto funkcií, čo znázorňuje tretí graf.

Z grafu vidíme, že strednú hodnotu priebehu stačí určiť na intervale  $T/2$ .

V prvom prípade (a) je vyjadruje súčin funkcia  $I_d k t (1 - k t)$ , kde  $k = 2/T$ . Stredná hodnota je

$$I_{D\min} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_d k t (1 - k t) dt = \frac{2}{T} I_d k \left( \frac{t^2}{2} - k \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{1}{6} I_d.$$

V druhom prípade

$$I_{D\max} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_d k t k t dt = \frac{2}{T} I_d k^2 \left( \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{1}{3} I_d.$$

Pomer maximálnej a minimálnej hodnoty

$$p = \frac{I_{D\max}}{I_{D\min}} = 2. \quad 4 \text{ b}$$

Pri postupnom zvyšovaní otáčok disku kolíše stredná hodnota intenzity svetla dopadajúceho na detektor v pomere 1:2.

- c) Maximálnu intenzitu svetla dostaneme, ak je v okamihu maximálnej intenzity lúča medzera celkom otvorená, tzn. za dobu  $\tau$  sa disk pootočí o jeden zub (prípadne celý počet zubov), tzn.  $T = \tau$ , a teda

$$\frac{2\pi}{N\omega} = \frac{2L}{c}, \text{ odkiaľ máme } n_{\max} = \frac{c}{2NL}.$$

Minimálna hodnota zodpovedá prípadu, keď maximálna intenzita lúča zodpovedá plnému zacieleniu, tzn. pootočeniu disku o šírku medzery (prípadne o nepárny počet medzier), tzn.  $\tau = T/2$ , takže

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{N\omega} = \frac{2L}{c}, \text{ odkiaľ máme } n_{\min} = \frac{c}{4NL}. \quad 2 \text{ b}$$

- d) Pre podmienky Fizeauovho experimentu

$$c = 4NL n_{\min} = 3,11 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

čo predstavuje nepresnosť približne 4 %. 2 b

## 2. úloha - Vákuový balón

Riešenie:

- a) Vztlková sila musí byť rovná sile tiažovej

$$(m_Z + m_B)g = V_B \rho_a g,$$

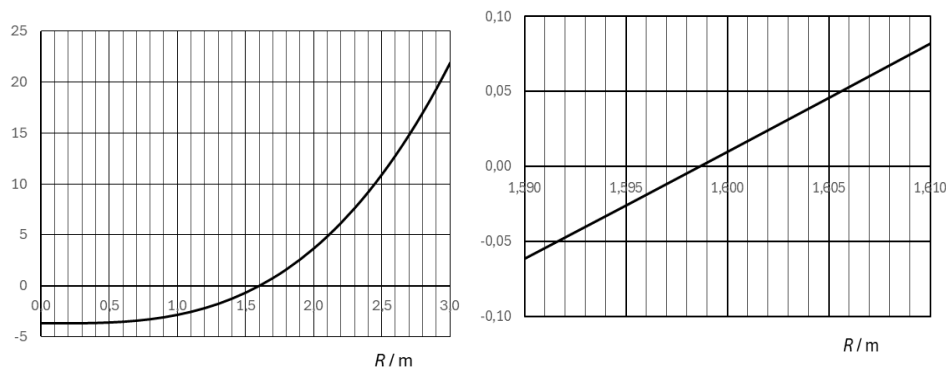
kde  $m_B = 4\pi R^2 \rho_B$  a  $V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$ , a teda

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a - 4\pi R^2 \rho_B - m_Z = 0.$$

Keďže ide o riešenie kubickej rovnice pre dané číselné hodnoty, najjednoduchšie je použitie graficko-numerickej metódy. Rovnicu upravíme na tvar

$$R^3 - 3 \frac{\rho_B}{\rho_a} R^2 - \frac{3}{4\pi} \frac{m_Z}{\rho_a} = 0, \quad (1)$$

pre dané hodnoty  $R^3 - (0,162 \text{ m})R^2 - (3,67 \text{ m}^3) = 0$ .



Na prvom grafe je hrubý odhad koreňa, na druhom je spresnené riešenie:  $R = 1,60$  m.

3 b

b) Energia nabitej tenkej vodivej guľovej vrstvy

$$E_G = \frac{1}{2} Q \varphi, \text{ kde } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R} \text{ je potenciál povrchu gule v prostredí s permitivitou } \epsilon,$$

a teda

$$E_G = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R}.$$

V dôsledku odpudivých síl pôsobí na stenu balónu tlak  $p_E$ . Pri malom zväčšení objemu pri konštantnom náboji sa vykoná práca  $p_E dV$ , ktorá je rovná úbytku energie gule  $-dE_G$ .

$$p_E 4\pi R^2 dR = -\frac{dE_G}{dR} dR = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R^2} dR,$$

odkiaľ

$$p_E = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon R^4}.$$

Balón nadobudne tvar gule, ak sa elektrický tlak vyrovná s tlakom atmosféry  $p_E = p_a$ . Odtiaľ máme

$$p_E = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon R^4} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon R}\right)^2 \frac{\epsilon}{2R^2} = \frac{\epsilon \varphi^2}{2R^2} = p_a.$$

Potrebné napätie, resp. potenciál povrchu gule,

$$U = \varphi = \sqrt{\frac{2p_a}{\epsilon_r \epsilon_0}} R = 124 \text{ MV}. \quad (2)$$

3 b

Je zrejmé, že táto požiadavka je nereálna.

c) V dielektriku na vonkajšom povrchu vodivej gule je elektrická intenzita

$$E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{U}{R} = 77,5 \text{ MV/m} = 77,5 \text{ kV/mm}. \quad (3)$$

Táto hodnota je väčšia ako elektrická pevnosť materiálu POM, preto by došlo k elektrickému prerazu dielektrika, a tým k jeho znehodnoteniu.

2 b

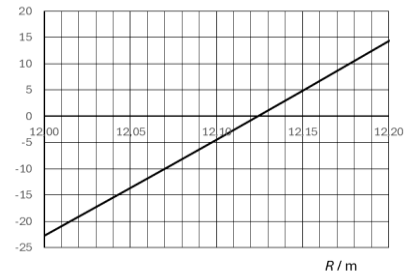
d) Pre hodnotu  $\rho_M$  na Marse budú v rovnici (1) hodnoty:  $R^3 - (10,5 \text{ m})R^2 - (239 \text{ m}^3) = 0$

Najprv urobíme hrubý odhad riešenia  $12 \text{ m} < R < 12,2 \text{ m}$ .  
Pre tento interval dostávame nasledujúci graf, z ktorého určíme s dostatočnou presnosťou riešenie rovnice  $R = 12,12 \text{ m}$ .

Zo vzťahu (2) pre  $p_M$  máme  $U = 73,6 \text{ MV}$

a intenzita elektrického poľa v dielektriku podľa (3) je  $E_e = 6,1 \text{ MV/m} = 6,1 \text{ kV/mm}$ ,

čo je výrazne menšie ako elektrická pevnosť POM.



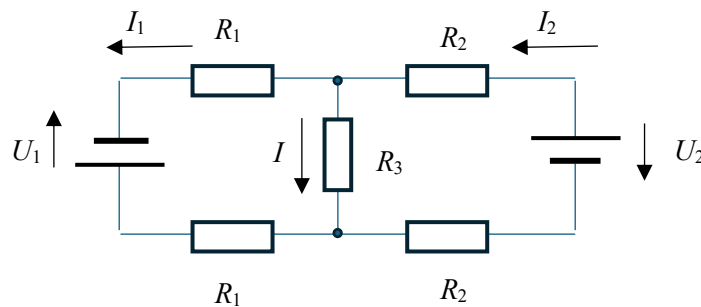
2 b

Vidíme, že z fyzikálneho pohľadu môže byť idea v podmienkach Marsu reálna, ide iba o generovanie dostatočne vysokého napätia.

### 3. úloha - Kmity vodiča v magnetickom poli

Riešenie:

a) Označíme  $x$  vzdialenosť bežca od ľavého konca koľajníc. Riešime elektrický obvod podľa obrázku.



Podľa Kirchoffovho zákona platí

$$2R_1 I_1 - U_1 - R_3 I = 0, \text{ odkiaľ } I_1 = \frac{U_1 + R_3 I}{2R_1}$$

$$a) \quad 2R_2 I_2 + R_3 I - U_2 = 0, \text{ odkiaľ } I_2 = \frac{U_2 - R_3 I}{2R_2}$$

kde  $R_1 = \rho_1 x$ ,  $R_2 = \rho_1 (L - x)$ ,  $R_3 = \rho_2 d$ .

Prúd bežcom

$$I = I_2 - I_1 = \frac{U_2 - R_3 I}{2R_2} - \frac{U_1 + R_3 I}{2R_1}$$

Odtiaľ dostávame

$$I = \frac{U_2 R_1 - U_1 R_2}{2R_2 R_1 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

a po dosadení za jednotlivé odpory

$$I = \rho_1 \frac{U_2 x - U_1 (L - x)}{2\rho_1^2 x(L - x) + \rho_1 \rho_2 L d} = \rho_1 \frac{(U_1 + U_2)x - U_1 L}{2\rho_1^2 x(L - x) + \rho_1 \rho_2 L d}$$

Na bežec pôsobí magnetická sila s veľkosťou

$$F = B I d = B d \rho_1 \frac{(U_1 + U_2)x - U_1 L}{2 \rho_1^2 x(L-x) + \rho_1 \rho_2 L d},$$

pre  $I > 0$  smerom ku zdroju  $U_2$ , pre  $I < 0$  v opačnom smere.

Rovnováha nastane, ak  $F = 0$ , odkiaľ dostávame súradnicu rovnovážnej polohy

$$x_0 = L \frac{U_1}{U_2 + U_1} = 25,7 \text{ cm.} \quad 5 \text{ b}$$

- b) Ak je  $x > x_0$ ,  $F < 0$ , tzn. po vychýlení z rovnovážnej polohy pôsobí sila smerom nazad k rovnovážnej polohe

$$F = B d \frac{x_0(U_2 + U_1) - (U_1 + U_2)x}{2 \rho_1 x(L-x) + \rho_2 L d} = - \frac{B d \rho_1 (U_2 + U_1)(x - x_0)}{2 \rho_1^2 x(L-x) + \rho_1 \rho_2 L d}.$$

Označíme  $y = x - x_0$  výchylku z rovnovážnej polohy. Vzťah pre silu upravíme na tvar

$$F = \frac{-B d \rho_1 (U_2 + U_1) y}{2 \rho_1^2 (x_0 + y)(L - x_0 - y) + \rho_1 \rho_2 L d} = \frac{-B d (U_2 + U_1) y}{2 \rho_1 \left( L \frac{U_1}{U_2 + U_1} + y \right) \left( L \frac{U_2}{U_2 + U_1} - y \right) + \rho_2 L d}.$$

Uvažujeme malé výchylky z rovnovážnej polohy, pre ktoré platí

$$y \ll L \frac{U_1}{U_2 + U_1} \quad \text{a} \quad y \ll L \frac{U_2}{U_2 + U_1}.$$

Silu potom vyjadríme v tvare

$$F = - \frac{B d (U_2 + U_1)^3}{2 \rho_1 L^2 U_1 U_2 + \rho_2 L d (U_2 + U_1)^2} y = -k y.$$

Pohybová rovnica  $m \ddot{y} = -k y$  je rovnica harmonických kmitov s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{B d (U_2 + U_1)^3}{m L (2 \rho_1 L U_1 U_2 + \rho_2 d (U_2 + U_1)^2)}} = 0,31 \text{ Hz.} \quad 5 \text{ b}$$

#### 4. úloha - Kyvadlo na guli

Riešenie:

- a) Pri odchýlke  $\varphi$  priamej časti vlákna od zvislého smeru platí

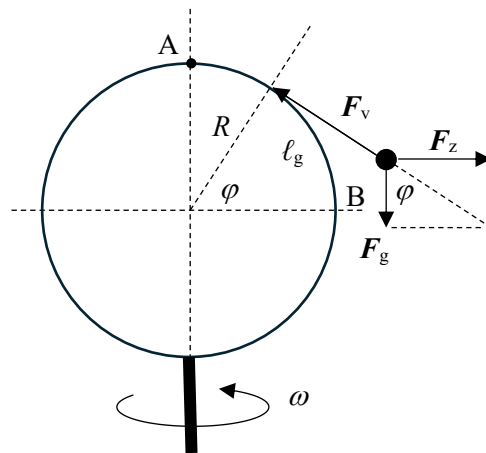
$$r = R \cos \varphi + R \varphi \sin \varphi \quad (1)$$

$$h = R \sin \varphi - R \varphi \cos \varphi, \quad (2)$$

kde  $\ell_g = R \varphi$  je dĺžka priamej časti vlákna.

2 b

- b) Vlákno má smer výslednice síl tiažovej  $F_g$  a zotrvačnej  $F_z$ , a je v rovnováhe so silou  $F_v$  ťahu vlákna, a teda platí

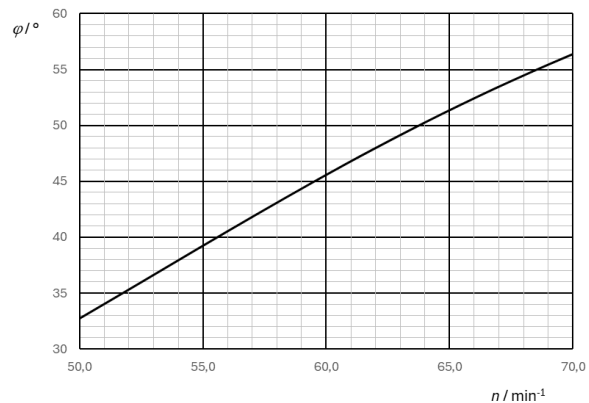
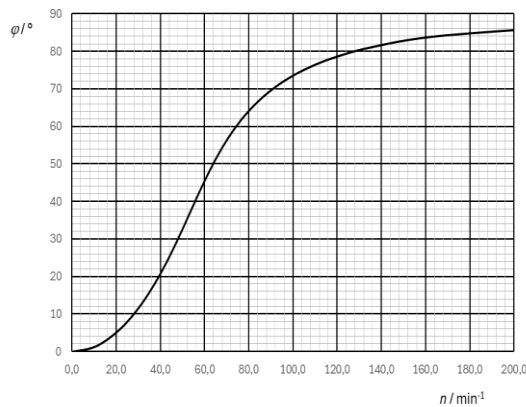


$$\tan \varphi = \frac{F_z}{F_g} = \frac{m \omega^2 r}{m g}. \quad (3)$$

Po dosadení za polomer  $r$  kružnice dostávame

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\frac{\tan \varphi}{\cos \varphi + \varphi \sin \varphi}} = 2\pi n. \quad (4) \quad 2 \text{ b}$$

- c) Pre jednotlivé hodnoty uhlu  $\varphi$  určíme zo vzťahu (4) zodpovedajúce hodnoty otáčok  $n$  a zostrojíme graf funkcie  $\varphi(n)$ .



Z prvého grafu určíme približnú hodnotu  $\varphi_1$  okolo  $45^\circ$ . Spresníme výpočet hodnôt v blízkom okolí  $n_1$  a zostrojíme graf pre tento malý interval. Z tohto grafu určíme presnejšiu hodnotu  $\varphi_1 = 45,6^\circ$ .

4 b

- d) Pre uhol  $\varphi_1$  určíme zo vzťahov (1) a (2) hodnoty  $r_1 = 25,4 \text{ cm}$  a  $h_1 = 3,2 \text{ cm}$ . 2 b

## 5. úloha - Funkcia krvi

Riešenie:

- a) Na jednu krvinku pripadá objem  $V_1$ , ktorý si predstavíme ako kocku s hranou  $a$ . Za priemernú vzájomnú vzdialenosť červených krviniek v krvi možno považovať  $\ell \approx a$ , kde

$$\ell = a = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{N_1}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{5 \times 10^{12}}} \approx 6 \mu\text{m}. \quad 1 \text{ b}$$

Vidíme, že krvinky sú usporiadané pomerne tesne.

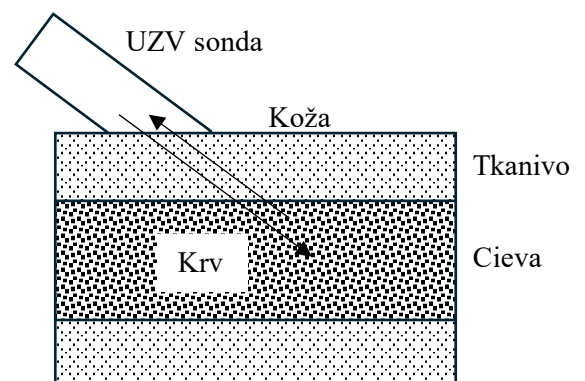
V jednom litri krvinky zaujímajú objem

$$V_c = N_1 V_c = (5 \times 10^{12}) (80 \times 10^{-15} \text{ l}) = 0,4 \text{ l}, \text{ tzn. } 40 \%. \quad 1 \text{ b}$$

Skutočný normálny hematokrit je 34 %, takže výsledok približného odhadu je veľmi dobrý.

- b) Vlnová dĺžka  $\lambda = \frac{c}{f} = d_c$ , a teda  $f = \frac{c}{d_c} = 201 \text{ MHz}$ . 1 b

- c) V praxi sa používajú frekvencie o jeden až dva rády nižšie, čo je dostatočné na dosiahnutie merateľného rozptylu. Pohybujúce sa krvinky zachytia vlnenie, pričom sa uplatní Dopplerov jav. Ak sa krvinka od zdroja (sondy) vzdaluje, prijatá frekvencia je nižšia ako frekvencia zdroja. Krvinka generuje ako pohyblivý zdroj vlnenie s prijatou frekvenciou, a to sa vracia k sonde. Opäť



sa prejaví Dopplerov jav, a taktiež znížením frekvencie. Keďže v našom prípade dochádza k zvýšeniu frekvencie, znamená to, že vzdialenosť krvíniiek od sondy sa znižuje, tzn. v obrázku krv prúdi v cieve doľava (proti sonde). 2 b

- d) V prvom prípade sonda vysiela signál s frekvenciou  $f$  a krvinka je pohybujúci sa prijímač, ktorý sa k sonde približuje rýchlosťou  $v \cos \alpha$ .

Ak začiatok prvej periódy signálu prejde k prijímaču za čas  $t_1 = L/c$ , začiatok druhej periódy prejde k prijímaču za čas  $t_2 = T + (L - v_r T_1)/c$ , kde  $L$  je začiatočná vzdialenosť prijímača od vysielača,  $T$  je perióda signálu,  $c$  rýchlosť šírenia signálu v danom prostredí,  $v_r$  rýchlosť približovania prijímača k vysielaču a  $T_1$  čas medzi zachytením začiatkov prvej a druhej periódy, tzn. periódy zaznamenaná prijímačom. Ak uvažíme  $T_1 = t_2 - t_1$ , dostaneme  $T_1 (1 + v_r/c) = T$ , odkiaľ dostávame pre frekvenciu

$$f_1 = f \left( 1 + \frac{v \cos \alpha}{c} \right), \quad v_r = v \cos \alpha.$$

Krvinka zachytené vlnenie rozptyľuje, a stáva sa tak pohybujúcim sa vysielačom signálu s frekvenciou  $f_1$ , ktorý deteguje nepohyblivý prijímač – sonda.

Začiatok prvej periódy signálu prejde vzdialenosť  $L$  k prijímaču za čas  $t_1 = L/c$ . Za periódu  $T_1$  sa prijímač posunie bližšie k prijímaču, takže začiatok druhej periódy oneskorený o  $T_1$  príde k prijímaču za čas  $t_2 = T_1 + (L - v_r T_1)/c$ . Perióda zaznamenaná prijímačom  $T_2 = t_2 - t_1$ , takže po úprave dostávame frekvenciu zachyteného signálu

$$f_2 = f_1 \frac{1}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}.$$

Frekvencia signálu detegovaného sondou

$$f_2 = f_1 \frac{1}{1 + \frac{v_r}{c}} = f \frac{1 - \frac{v_r}{c}}{1 + \frac{v_r}{c}} = f \frac{1 + \frac{v \cos \alpha}{c}}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}},$$

keďže  $v/c \ll 1$ , môžeme vzťah upraviť na tvar

$$f_2 \approx f \left( 1 + \frac{v \cos \alpha}{c} \right)^2 \approx f \left( 1 + 2 \frac{v \cos \alpha}{c} \right),$$

odkiaľ máme

$$\Delta f = f_2 - f \approx 2f \frac{v \cos \alpha}{c}.$$

Odtiaľ dostávame rýchlosť prúdenia krvi

$$v = \frac{c}{\cos \alpha} \frac{\Delta f}{2f} = 82 \text{ cm/s.} \quad 3 \text{ b}$$

Objemový prietok

$$Q = S_c v = \frac{\pi d_c^2}{4} \frac{c}{\cos \alpha} \frac{\Delta f}{2f} = 1,92 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 1,15 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

## 6. úloha - Filter

Riešenie:

- a) Pri nulovej frekvencii neprechádza kapacitormi prúd a možno ich teda odpojiť. V tom prípade sú vstupné a výstupné svorky priamo prepojené rezistormi  $R_1$  a  $R_2$ . Pri nulovom výstupnom prúde (multimeter s vysokým vstupným odporom) je tak  $A = 1$  a  $\Delta\varphi = 0$ .

Pri veľmi vysokej frekvencii je impedancia kapacitora veľmi malá a pre  $f \rightarrow \infty$  možno kapacitor nahraďiť skratom. Ak nahradíme kapacitor  $C_1$  skratom, sú výstupné svorky priamo prepojené so vstupnými a  $A = 1$ ,  $\Delta\varphi = 0$ .

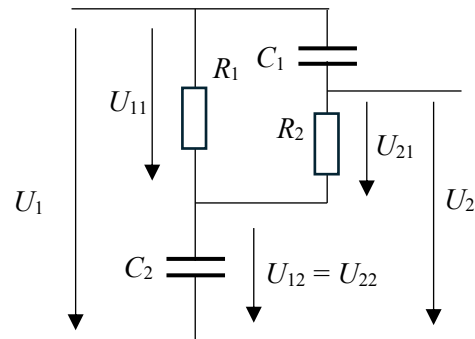
Prenos závisí od frekvencie, a keďže ide o pasívny obvod, nemôže byť väčší ako 1. Keďže krajné hodnoty sú  $A = 1$  a prenosová charakteristika musí byť spojitá, musí existovať frekvencia, pri ktorej má prenos lokálne minimum.

2 b

- b) Obvod možno riešiť rôznymi metódami, napr. metódou obvodových rovníc s použitím Kirchhoffových zákonov, metódou slučkových prúdov alebo metódou uzlových napätí. Metódy sú rôzne prácne, ale výsledky získané všetkými metódami musia byť rovnaké.

Ako príklad ukážeme metódu dvojitého deliča napätia. Obvodové veličiny označíme v komplexnom tvare – *fázormi*.

Za týmto účelom schému obvodu upravíme podľa obrázku. Prvý delič  $U_1 = U_{11} + U_{12}$  pozostáva z impedancie sústavy  $R_1$  paralelne so sériou  $C_1$ ,  $R_2$  a impedancie kapacitora  $C_2$ .



$$U_{11} = U_1 \frac{\frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}}{1 + \frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{j\omega C_2} + 1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}$$

a

$$U_{12} = U_1 \frac{1}{\frac{j\omega C_2}{1 + \frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{j\omega C_2} + 1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}}$$

Druhý delič  $U_{11} = U_{C1} + U_{21}$  pozostáva z impedancie kapacitora  $C_2$  a rezistora  $R_2$ .

$$U_{21} = U_{11} \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

Výstupné napätie je potom  $U_2 = U_{21} + U_{12}$ .

$$U_2 = U_1 \frac{\frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}}{\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}} \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} + U_1 \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1 (1 + j\omega C_1 R_2)}{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}}$$

Rovnicu upravíme na tvar

$$A = \frac{U_2}{U_1} = \frac{(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2) + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}{(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2) + j\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)}$$

Vyjadríme amplitúdovú a fázovú prenosovú charakteristiku

$$A = \frac{|U_2|}{|U_1|} = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_2 C_1)^2}{(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)^2}}. \quad 2 \text{ b}$$

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{\omega C_1 (R_1 + R_2)}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2} - \arctan \frac{\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2}. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Lokálny extrém (minimum) amplitúdovej charakteristiky  $A$  určíme z podmienky nulovej derivácie funkcie. Minimum  $A$  je zároveň minimom  $A^2$ , tzn. vzťahu pod odmocninou. Derivujeme zlomok

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = 0, \text{ a teda } f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0.$$

Použijeme

$$f(\omega) = (1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2) + j\omega C_1 (R_1 + R_2)$$

$$g(\omega) = (1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)^2$$

$$f'(\omega) = 2(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)(-2\omega R_1 R_2 C_1 C_2) + 2\omega (R_1 C_1 + R_2 C_1)^2$$

$$g'(\omega) = 2(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)(-2\omega R_1 R_2 C_1 C_2) + 2\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)^2,$$

dosadíme do podmienky minima a upravíme na tvar

$$\omega (1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)^2 (1 + 2\omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2) = 0.$$

Rovnice má dve reálna riešenia:  $\omega = 0$  a  $\omega_m = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ ,

resp.  $f_{m1} = 0$  a  $f_{m2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ . Pre dané hodnoty  $f_{m2} = 50,3$  Hz.

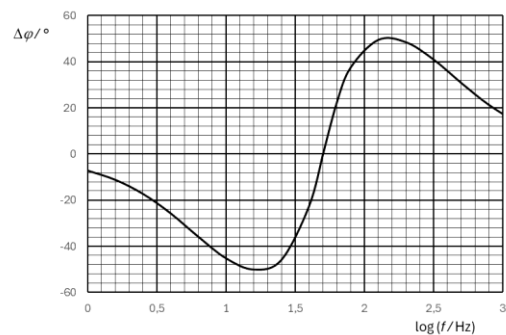
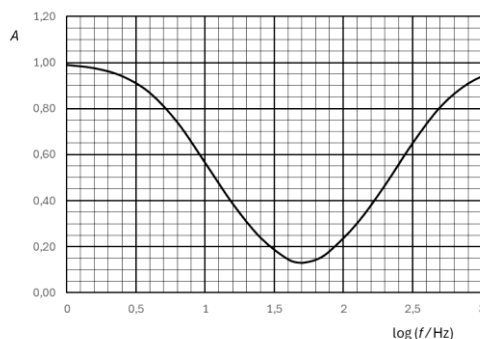
Prvé riešenie zodpovedá maximu  $A_{m1} = 1$ , druhé riešenie je minimum, pre ktoré je

$$A_{m2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 C_2}{R_1 + R_2 C_1}} = 0,13.$$

Pre  $f_{m1}$  je  $\Delta\varphi_{m1} = 0$ , pre  $f_{m2}$  je po dosadení  $\Delta\varphi_{m2} = 0$ .

2 b

- d) Grafy



Z grafu vidno, že minimum zodpovedá  $\log f_m = 1,7$ , odkiaľ máme  $f_m = 50$  Hz, a pre túto frekvenciu  $\Delta\varphi = 0$ . Amplitúdový prenos z grafu  $A_m = 0,13$  zodpovedá teoretickému výpočtu.

Z grafu vidno, že ide o pásmový filter s potlačením frekvencií okolo  $f_m$ .

2 b

## 7. úloha - Určenie polomeru krivosti misky – experimentálna úloha

Riešenie:

Možné sú rôzne postupy riešenia, napr.:

Ťažisko T guľôčky je v rovnovážnej polohe vo vzdialenosti  $R-r$  od stredu S krivosti misky. Po vychýlení spojnice ST o uhol  $\varphi$  z rovnovážnej polohy je potenciálna energia guľôčky

$$E_p = m g (R-r) (1 - \cos \varphi), \text{ a pre malé vychýlenia } E_p \approx \frac{1}{2} m g (R-r) \varphi^2 = \frac{1}{2} D \varphi^2.$$

Ak sa guľôčka pohybuje valivým pohybom, je rýchlosť pohybu ťažiska  $v_T = (R-r) \dot{\varphi}$

a guľôčka sa pritom otáča s uhlovou rýchlosťou  $\Omega = \frac{v_T}{r}$ .

Kinetická energia guľôčky

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J_0 \Omega^2 = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m r^2 \right) \frac{(R-r)^2 \dot{\varphi}^2}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{7}{5} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Uhlová frekvencia pohybu

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}, \text{ a teda } T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

Ak sa použije valček, postup je rovnaký s jedinou zmenou  $J_0 = \frac{1}{2} m r^2$ ,

$$\text{a teda } T_{\text{val}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Odvodenie 3 b

Experiment podľa spracovania max. 7 b

---

### Fyzikálna olympiáda – 67. ročník – úlohy domácej prípravy kat. B

Návrh a spracovanie úloh: Ľubomír Konrád, Aba Teleki (2), Ivo Čáp

Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády  
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025