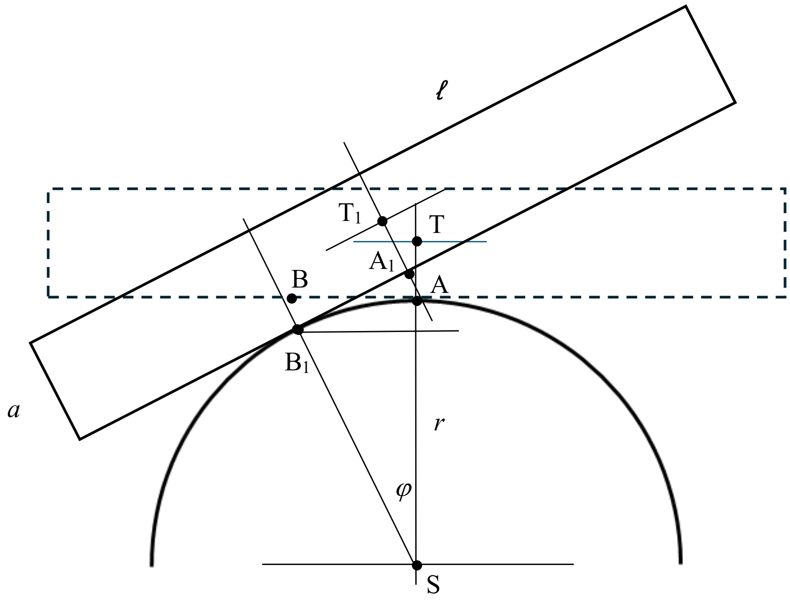
**67. ročník Fyzikálnej olympiády**
v školskom roku 2025/2026
celoštátne kolo kategória A
*riešenie teoretických úloh*

## 1. úloha - Tyč na valci

*Riešenie*:

a) Obrázok




Tyč sa po povrchu valca odvalí tak. že bod dotyku A sa zmení na $B_1$, pričom dĺžka oblúka $AB_1$ je $s = r\,\varphi$. Úsečka AB s dĺžkou $s$ sa po vychýlení zobrazí ako $A_1B_1$.
Po vychýlení tyče sa zmení poloha ťažiska T tyče na $T_1$. Určíme zmenu výšky ťažiska, a teda aj zmenu potenciálnej energie tyče.

b) Výška ťažiska tyče v rovnovážnej polohe vzhľadom na vodorovnú rovinu $\rho$ prechádzajúcu osou valca

$$h_T = r + \frac{a}{2}\,.$$

Po vychýlení tyče o uhol $\varphi$ bez prekĺzavania je výška ťažiska $T_1$ vzhľadom na rovinu $\rho$

$$h_{T1} = r\cos\varphi + s\sin\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi\,.$$

Zmena výšky ťažiska

$$\Delta h_T = h_{T1} - h_T = r\cos\varphi + s\sin\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi - r - \frac{a}{2}.$$

Zmena potenciálnej energie tyče je

$$\Delta E_p = m\,g\,\Delta h_T = m\,g\left[r\,\varphi\sin\varphi - \left(r + \frac{a}{2}\right)(1-\cos\varphi)\right].$$

Pre malú výchylku $\varphi$ tyče z rovnovážnej polohy je zmena potenciálnej energie tyče

$$\Delta E_\mathrm{p} \approx m\,g\left[r\,\varphi^2 - \left(r + \frac{a}{2}\right)\frac{\varphi^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\,m\,g\left(r - \frac{a}{2}\right)\varphi^2.$$

Rovnovážna poloha je stabilná, pre $\varphi \to 0$ je $\Delta E_\mathrm{p} > 0$,

tzn. musí platiť podmienka $\quad r > \dfrac{a}{2}$.

*Úlohu možno riešiť aj alternatívnym spôsobom :*

Na tyč pôsobí tiažová sila s pôsobiskom v ťažisku, tlaková sila valca a sila trenia v bode dotyku s povrchom valca. V rovnovážnej polohe je výsledný moment síl nulový, tzn. ťažisko sa nachádza nad osou valca (priamka TS má zvislý smer). Po vychýlení tyče z rovnovážnej polohy sa stáva osou otáčania priamka prechádzajúca bodom dotyku $\mathrm{B}_1$. Moment tlakovej sily a sily trenia vzhľadom na túto os je nulový. Nenulový je iba moment tiažovej sily

$$M = -m\,g\,x_\mathrm{T}\,,$$

kde $x_\mathrm{T}$ je rameno tiažovej sily vzhľadom na uvedenú os otáčania

$$x_\mathrm{T} = \mathrm{A_1B_1}\cos\varphi - \mathrm{A_1T_1}\sin\varphi = r\,\varphi\cos\varphi - \frac{a}{2}\sin\varphi\,.$$

Rameno možno pre malý uhol $\varphi$ linearizovať a moment sily je potom

$$M = -m\,g\left(r - \frac{a}{2}\right)\varphi\,.$$

Moment sily je vratný (podmienka stability), ak $r > a/2$.

c) Ak je splnená podmienka stabilnej rovnovážnej polohy, predstavuje pohyb tyče okolo rovnovážnej polohy kmity. Ak tyč nepreklzáva (trenie je statické), zachováva sa mechanická energia sústavy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}\right) = 0\,,$$

kde $E_\mathrm{k}$ je kinetická energia tyče

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I\,\dot\varphi^2\,,$$

pričom

$$I = I_0 + m\left(\mathrm{B_1T_1}\right)^2 = \frac{1}{12}m\left(\ell^2 + a^2\right) + m\left[\left(r\varphi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{12}m\left[\ell^2 + 4a^2 + 12\left(r\varphi\right)^2\right]$$

je moment zotrvačnosti vzhľadom na okamžitú os otáčania.

Pre veľmi malé výchylky máme $(r\,\varphi)^2 \ll \ell^2$ a kinetickú energiu upravíme na kvadratickú funkciu uhlovej rýchlosti

$$E_\mathrm{k} \approx \frac{1}{24}m\left(\ell^2 + 4a^2\right)\dot\varphi^2\,.$$

Ak vyjadríme mechanickú energiu v tvare

$$E = \frac{1}{2}I\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}D\,\varphi^2\,,\ \text{kde direkčný moment}\ D = m\,g\left(r - \frac{a}{2}\right),$$

časová derivácia (pohybová rovnica)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = I\,\dot\varphi\ddot\varphi + D\,\varphi\dot\varphi = 0\ \text{ a po delení uhlovou rýchlosťou}$$

$$I\,\ddot\varphi + D\,\varphi = 0\,,$$

čo je pohybová rovnica kmitov s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$ , a teda periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = \pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 4a^2}{3g\left(r - \frac{a}{2}\right)}}\,.$$

*Úlohu možno riešiť aj alternatívnym spôsobom :*
Pohybovú rovnicu vyjadríme v tvare $I\,\varepsilon = M$ a po dosadení za moment sily

$I\,\ddot{\varphi} = -m\,g\left(r - \frac{a}{2}\right)\varphi$, čo je rovnice rovnaká ako v predchádzajúcom prípade.

d) Doplnená tabuľka:

| $\ell$/cm | $a$ / mm | $b$ / mm | $r$ / cm | $T_{exp}$ / s | $T_{teor}$ / s | $\delta T$ / % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 10 | 10 | 29 | 1,46 | 1,50 | – 2,7 |
| 40 | 50 | 10 | 34 | 2,38 | 2,52 | – 5,6 |
| 39 | 24 | 44 | 29 | 1,73 | 1,75 | 1,1 |
| 21,2 | 44 | 24 | 27,4 | 0,77 | 0,83 | – 7,2 |
| 21,2 | 24 | 44 | 27,4 | 0,68 | 0,67 | 1,5 |

**2. úloha - Vesmírna loď**

*Riešenie:*

a) V dôsledku odporu prostredia sa zmenšuje mechanická energia lode, čo vedie k poklesu polomeru trajektórie a tým aj k skráteniu času obehu. Keďže odporová sila je veľmi malá, je aj zmena polomeru trajektórie za jeden obeh veľmi malá, a behom jedného obehu môžeme pohyb považovať približne za pohyb po kružnici.

b) Mechanická energia lode pozostáva z kinetickej energie a gravitačnej potenciálnej energie

$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{R}$, kde $G$ je univerzálna gravitačná konštanta,

$m$ hmotnosť lode, $M$ hmotnosť planéty, $v$ rýchlosť pohybu lode a $R$ polomer trajektórie lode.
Pri obehu okolo planéty sa časť mechanickej energie premení na teplo v dôsledku odporu prostredia

$$\Delta E = 2\pi R F_o ,$$

kde $F_o$ je odporová sila, pričom do úvahy prichádzajú dve krajné možnosti $F_o = -\alpha v$ alebo $F_o = -\beta v^2$.
Pri pohybe po kružnici je zotrvačná odstredivá sila v rovnováhe so silou gravitačnou

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{M m}{R^2} ,$$

pričom čas obehu okolo planéty $T = \frac{2\pi R}{v}$.
Z uvedených rovníc vyjadríme polomer trajektórie a rýchlosť pohybu ako funkcie času obehu

$$v = \left( G \frac{2\pi M}{T} \right)^{1/3} \quad \text{a} \quad R = \left( G \frac{M}{4\pi^2} T^2 \right)^{1/3} . \tag{1}$$

Ako vidíme, so skracovaním času $T$ sa zmenšuje polomer $R$ trajektórie a narastá rýchlosť $v$ pohybu lode.
S použitím týchto vzťahov vyjadríme energiu lode ako funkciu doby obehu

$$E = -\frac{1}{2} m \left( \frac{2\pi G M}{T} \right)^{2/3} .$$

Zmena energie $\Delta E$ súvisí so zmenou obežnej doby

$$\Delta E = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} \Delta T = -\frac{1}{2} m \left( 2\pi G M \right)^{2/3} \frac{\mathrm{d}T^{-2/3}}{\mathrm{d}T} \Delta T = \frac{1}{3} m \left( 2\pi G M \right)^{2/3} T^{-5/3} \Delta T . \tag{2}$$

Zmena energie je rovná práci odporovej sily

$$\Delta E = F_o 2\pi R = F_o 2\pi \left( G \frac{M}{4\pi^2} T^2 \right)^{1/3} . \tag{3}$$

Uvážme teraz obidva varianty:

i) Odporová sila je priamoúmerná rýchlosti pohybu lode

$$F_o = -k_1 v = -k_1 \left( G \frac{2\pi M}{T} \right)^{1/3} . \tag{4}$$

S použitím vzťahov (2) a (3) dostávame pre zmenu $\Delta T$ doby obehu

$$\frac{1}{3} m \left( 2\pi G M \right)^{2/3} T^{-5/3} \Delta T = -k_1 \left( G \frac{2\pi M}{T} \right)^{1/3} 2\pi \left( G \frac{M}{4\pi^2} T^2 \right)^{1/3} ,$$

a po úprave

$$-3\frac{k_1}{m}(2\pi)^{4/3} = T^{-2}\,\Delta T = -\Delta\left(\frac{1}{T}\right),$$

a teda $\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = 3(2\pi)^{4/3}\frac{k_1}{m} = K_1$ (konštanta). (5)

Ak teda platí (4), je zmena prevrátenej doby obehu na jeden obeh konštantná, a teda veličina $1/T$ pri $n$–tom obehu, tzn. po ($n$–1) predchádzajúcich obehoch je

$$\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_1} = (n-1)\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right), \text{ resp. } \frac{1}{n-1}\left(\frac{T_1}{T_n} - 1\right)\frac{T_2}{T_1 - T_2} = 1.$$

ii) Odporová sila je priamoúmerná druhej mocnine rýchlosti pohybu lode

$$F_o = -k_2 v^2 = -k_2\left(G\frac{2\pi M}{T}\right)^{2/3}. \qquad (6)$$

S použitím vzťahov (2) a (3) dostávame pre zmenu $\Delta T$ doby obehu

$$-\frac{3k_2}{m}(2\pi G M)^{1/3} = T^{-5/3}\,\Delta T = -\frac{3}{2}\Delta\left(\frac{1}{T^{2/3}}\right),$$

a teda $\Delta\left(\frac{1}{T^{2/3}}\right) = \frac{2k_2}{m}(2\pi G M)^{1/3} = K_2$ (konštanta) (7)

Ak teda platí (6), zmena veličiny $1/T^{2/3}$ na jeden obeh je konštantná, a teda hodnota veličiny pri $n$–tom obehu, tzn. po ($n$–1) obehoch je

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{T_n^{2/3}} - \frac{1}{T_1^{2/3}}\right)\frac{(T_1 T_2)^{2/3}}{T_1^{2/3} - T_2^{2/3}} = 1 \ .$$

Posúdime oba varianty

| $n$ | 1 | 2 | 10 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| $T_n$ / s | 5832 | 5 776 | 5 358 | 4 989 |
| $\frac{1}{n-1}\left(\frac{T_1}{T_n} - 1\right)\frac{T_2}{T_1 - T_2}$ | - | 1,000 | 1,014 | 1,025 |
| $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{T_n^{2/3}} - \frac{1}{T_1^{2/3}}\right)\frac{(T_1 T_2)^{2/3}}{T_1^{2/3} - T_2^{2/3}}$ | - | 1,000 | 1,001 | 1,000 |

Z výsledku vidno, že pravdepodobnejší je variant odporu prostredia priamoúmernému druhej mocnine rýchlosti, tzn. podľa vzťahu (6).

c) Relatívne zmeny rýchlosti pohybu a polomeru trajektórie určíme podľa vzťahov (1)

$$\frac{v_{10}}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_{10}}\right)^{1/3} = 1{,}03 \qquad \frac{R_{10}}{R_1} = \left(\frac{T_{10}}{T_1}\right)^{2/3} = 0{,}97.$$

Z výsledku vidno, že polomer sa zmenší o 3 %, zatiaľ čo rýchlosť v dôsledku odporu prostredia narastie o 3 %.

Zaujímavé, že napriek poklesu energie lode v dôsledku straty premenou mechanickej energie na teplo sa rýchlosť lode zväčšuje, čo sa nazýva „paradox družice“.

**3. úloha - Gravitačný posun**

*Riešenie*:

a) Svetlo považujeme za fotón s energiou $E = m_\mathrm{f}\, c^2 = \dfrac{h\,c}{\lambda}$. Ak sa uvoľní z gravitačného poľa Slnka, zmení sa jeho energia o $\Delta E = -\,G\,\dfrac{M_\mathrm{S}\, m_\mathrm{f}}{R_\mathrm{S}}$ . Zmena energie fotónu $\Delta E = \Delta\left(\dfrac{h\,c}{\lambda}\right) = -h\,c\,\dfrac{1}{\lambda^2}\,\Delta\lambda$ .

Odtiaľ dostávame gravitačný posun vlnovej dĺžky

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{G}{c^2}\,\frac{M_\mathrm{S}}{R_\mathrm{S}} = 2{,}12\cdot 10^{-6}.$$

Keďže atómy, ktoré vyžarujú svetlo, sa pohybujú tepelným pohybom so strednou kvadratickou rýchlosťou

$$\frac{1}{2} m\left\langle v^2\right\rangle = \frac{3}{2} k_\mathrm{B}\, T_\mathrm{S}\text{, a teda } v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{3 k_\mathrm{B}\, T_\mathrm{S}}{m_\mathrm{H}}}\,.$$

Pohyb vyvolá zmenu pozorovanej vlnovej dĺžky spôsobenú Dopplerovým javom

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_\perp}{c}\,.$$

Rozsah rýchlostí pohybu atómov voči pozorovateľovi je $\pm\, v_\mathrm{s}$, a teda Dopplerovská šírka spektrálnej čiary

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\,\frac{v_\mathrm{s}}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{3 k_\mathrm{B}\, T_\mathrm{S}}{m_\mathrm{H}}} = 8{,}13\cdot 10^{-5}.$$

Je zrejmé, že Dopplerovské rozšírenie celkom prekryje gravitačný posun vlnovej dĺžky.

b) V prípade Síria B dostávame rovnakým spôsobom

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_\mathrm{grav} = \frac{G}{c^2}\,\frac{M_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} = 2{,}40\cdot 10^{-4}$$

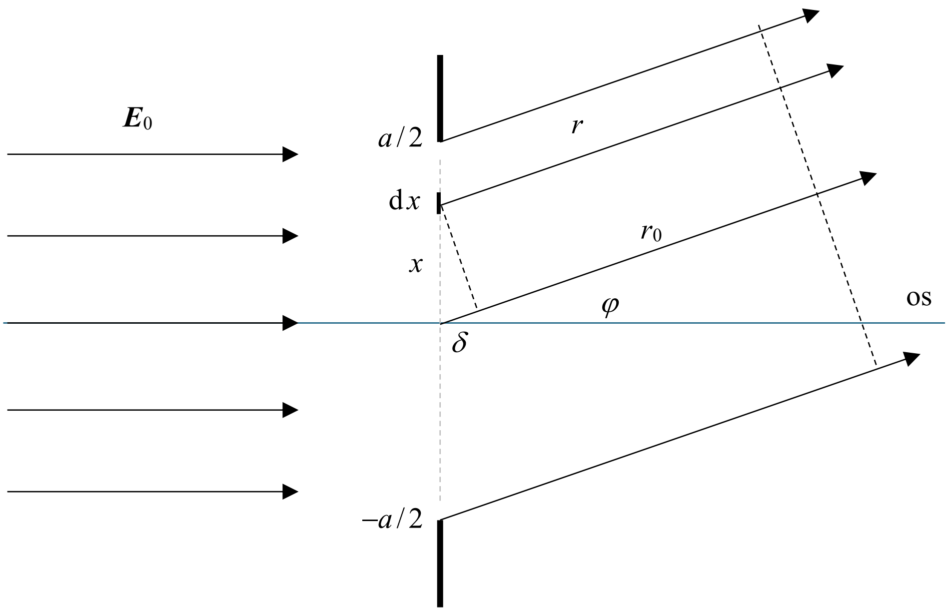
a $$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_\mathrm{Dopp} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{3 k_\mathrm{B}\, T_\mathrm{B}}{m_\mathrm{H}}} = 1{,}66\cdot 10^{-4}.$$

Je zrejmé, že gravitačný posun spektrálnej čiary je dostatočne veľký na to, aby sa mohol pozorovať.

**4. úloha - Analýza spektrálnej čiary sodíka**

*Riešenie:*

a) Obrázok štrbiny




Rovinná vlny dopadá na štrbinu. Každý bod vlnoplochy v štrbine sa stáva zdrojom elementárnej valcovej vlny pre ďalší priestor. Štrbinu rozdelíme na elementárne pásiky s šírkou d$x$. Polohu pásiku v štrbine udáva vzdialenosť $x$ od osi sústavy. Sledujeme vlnu, ktorá sa šíri pod uhlom $\varphi$ vzhľadom na os sústavy, ktorá je súčtom elementárnych vĺn. Keďže dráha $r$ jednotlivých elementárnych vĺn je rôzna, stretávajú sa na spoločnej vlnoploche s fázovým rozdielom

$$\Delta\varphi = k\,\Delta r = k\,x\sin\varphi$$

vzhľadom na lúč $r_0$.

Výsledná vlna je súčtom elementárnych vĺn

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(r_0 + k\,x\sin\varphi - \omega t\right)}\,\frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{E_0}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\,r_0 - \omega t\right)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x\sin\varphi}\,\mathrm{d}x = \frac{E_0}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\,r_0 - \omega t\right)}\,\frac{1}{\mathrm{i}\,k\sin\varphi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\,a}{2}\sin\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\,a}{2}\sin\varphi}\right)$$

Vzťah upravíme

$$E = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\,r_0 - \omega t\right)}\,\frac{2}{k\,a\sin\varphi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\,a}{2}\sin\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\,a}{2}\sin\varphi}}{2\mathrm{i}}\right) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\,r_0 - \omega t\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{k\,a}{2}\sin\varphi\right)}{\frac{k\,a}{2}\sin\varphi} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\,r_0 - \omega t\right)}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,,$$

kde pre zjednodušenie zápisu zavedený parameter $\alpha = \frac{k\,a}{2}\sin\varphi$ .

Intenzita svetla je priamoúmerná $E^2$, takže

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 .$$

Prvé minimum zodpovedá podmienke $\alpha_{\min 1} = \pi$, odkiaľ máme

$$\frac{k\,a}{2}\sin\varphi_{\min 1} = \pi\text{, resp. } \sin\varphi_{\min 1} = \frac{\lambda}{a}\,.$$

Pre $\varphi_{\min 1} = \Delta\varphi/2 = 60°$ dostávame $a = \dfrac{\lambda}{\sin(\Delta\varphi/2)}$ = 0,68 μm.

Pre nulté maximum $\alpha_{\max 0} = 0$ a $I = I_0$. Pre prvé difrakčné maximum máme $\alpha_{\max 1} = (3/2)\pi$. Pomer intenzity prvého a nultého maxima

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{\sin\alpha_{\max 1}}{\alpha_{\max 1}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 = 0{,}045 = 4{,}5\,\%\,.$$

b) Štrbiny v mriežke považujeme za elementárne zdroje svetla. Ak uvažujeme difrakčný lúč pod uhlom $\varphi$ vzhľadom na os sústavy, pri $N$ štrbinách je výsledná vlnová funkcia

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k(r_0 - n\,d\sin\varphi) - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k r_0 - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,n\,d\sin\varphi}\,.$$

Ide o geometrický rad s kvocientom $q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,d\sin\varphi}$, $N$ členmi a súčtom $\dfrac{1-q^N}{1-q}$, takže

$$E = E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k r_0 - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N k d\sin\varphi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k d\sin\varphi}} = E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k r_0 - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\frac{kd}{2}\sin\varphi}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd}{2}\sin\varphi}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\frac{kd}{2}\sin\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\frac{kd}{2}\sin\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd}{2}\sin\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd}{2}\sin\varphi}} =$$

$$= E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k r_0 - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\frac{kd}{2}\sin\varphi}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd}{2}\sin\varphi}}\,\frac{\sin\left(N\dfrac{kd}{2}\sin\varphi\right)}{\sin\left(\dfrac{kd}{2}\sin\varphi\right)} = E_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k r_0 - \omega t\right]}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)\frac{kd}{2}\sin\varphi}\,\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

Pre zjednodušenie zápisu je zavedený parameter $\beta = N\dfrac{k\,d}{2}\sin\varphi$.

Intenzita svetla je priamoúmerná kvadrátu absolútnej hodnoty elektrickej intenzity $I \sim |E|^2$, a teda

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2.$$

Táto funkcia je pre parameter $\beta$ periodická s periódou π.

Pre $\beta$ = 0, π, 2π, ... $\lim\limits_{\beta\to 0}\left(\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = N$. Ide o hlavné maximá funkcie pre $\beta = n\pi$.

Pre $\beta$ = 0 máme nulté maximum, prvé hlavné maximum je dané podmienkou $N\beta = \pi$, odkiaľ máme

$$\frac{k\,d}{2}\sin\varphi_1 = \pi\text{, resp. } d\sin\varphi_1 = \lambda\,.$$

Pre požadovaný difrakčný uhol

$$d = \frac{\lambda}{\sin\varphi_1} = 1{,}18\ \mu\text{m}.$$

c) Minimá sú dané nulovou hodnotou čitateľa (okrem $\beta = n\pi$, kedy je nulový aj menovateľ – hlavné maximá) $N\beta = n\pi$. Tzn. pre prvé minimum $N\beta = \pi$, odtiaľ $\sin\varphi_{\min} = \dfrac{1}{N}\dfrac{\lambda}{d}$. Šírka hlavného maxima je tak $\Delta\varphi_{\mathrm{m}} = 2\varphi_{\min} = 2\arcsin\dfrac{1}{N}\dfrac{\lambda}{d}$. Veľkosť nasledujúceho maxima pre $N\beta = 3\pi/2$ je

$$\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\left(3\pi/2N\right)}\approx N\,\frac{2}{3\pi}=0,21\,N\ \text{ pre } N>>1.$$

Vidíme, že hlavné maximum je veľmi ostré a jeho šírka určuje rozlišovaciu schopnosť mriežky. Rozlišovacia schopnosť sa zväčšuje s počtom $N$ štrbín, ktoré sa na difrakcii podieľajú, tzn. na šírke dopadajúceho svetelného zväzku (ak je užší ako šírka mriežky).

Sodíkový dublet rozlíšime, ak zmena $\Delta\varphi_1 \geq \Delta\varphi_m$. Diferencovaním vzťahu $d\sin\varphi_1=\lambda$ dostávame

$$d\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1=\Delta\lambda\text{, resp. }\Delta\varphi_1=\frac{\Delta\lambda}{d\cos\varphi_1}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\tan\varphi_1\geq 2\arcsin\frac{1}{N}\frac{\lambda}{d},$$

odkiaľ máme

$$N\geq\frac{\lambda}{d}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\Delta\lambda}{2\lambda}\tan\varphi_1\right)}\approx\frac{2\lambda}{\Delta\lambda}\cos\varphi_1.$$

Šírka zväzku

$$D=N\,d\geq\frac{2\lambda^2}{\Delta\lambda}\frac{1}{\tan\varphi_1}=2,0\text{ mm.}$$

***Alternatívny postup riešenia*:**

a) Keďže úlohou nie je vyšetrovanie detailného opisu difrakčného spektra, výsledky môžeme získať aj zjednodušeným postupom.

Štrbinu rozdelíme na tenké pásiky a tie usporiadame do dvojíc vzdialených o polovicu šírky štrbiny. Výsledná vlna je potom súčtom vĺn od jednotlivých dvojíc. Vlna od dvojice má maximálnu intenzitu, ak od oboch pásikov sú lúče vo fáze, a minimum, ak sú lúče v protifáze.

Najväčšiu intenzitu ma svetlo v priamom smere (nulté maximum), pri narastajúcom uhle odchýlky od priameho smeru intenzita klesá až po uhol, pri ktorom je intenzita nulová. Vtedy platí

$$k\frac{a}{2}\sin\varphi_{\min}=\pi\text{, kde vlnové číslo }k=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

Pre uhol prvého minima máme

$$\sin\varphi_{\min 1}=\frac{\lambda}{a}.$$

Pri ďalšom zväčšovaní uhlu $\varphi$ opäť dostávame prvé difrakčné maximum, druhé minimum atď.

Šírka hlavného (nultého) maxima na úrovni poklesu intenzity svetla na nulovú hodnotu je

$$\Delta\varphi_0=2\varphi_{\min 1}=2\arcsin\frac{\lambda}{a}.$$

Šírka štrbiny pre požadovanú šírku hlavného difrakčného laloku

$$a=\frac{\lambda}{\sin\dfrac{\Delta\varphi_0}{2}}=680\text{ nm.}$$

Tento postup neumožňuje určiť pomer intenzít difrakčných maxím.

b) V prípade mriežky vzájomne interferujú lúče, vychádzajúce z jednotlivých štrbín. Základná podmienka vzniku interferenčného maxima je fázový posun medzi lúčmi od susedných štrbín rovný násobku $2\pi$

$$k\,d\sin\varphi_{\max n}=2n\pi.$$

Pre prvé maximum dostávame

$$\sin\varphi_{\max 1} = \frac{\lambda}{d}.$$

Pre požadovaný uhol prvého difrakčného maxima máme

$$d = \frac{\lambda}{\sin\varphi_{\max 1}} = 1{,}18\ \mu\text{m}.$$

c) Medzi nultým a prvým maximom sa nachádza minimum s podmienkou

$$k\,d\sin\varphi_{\min 1} = \pi, \text{ odkiaľ máme } \sin\varphi_{\min 1} = \frac{\lambda}{2\sin\varphi_{\min 1} = \dfrac{\lambda}{N\,d}\,d}.$$

Ďalšou možnosťou konštruktívnej interferencie je fázový posun $2\pi n$ medzi lúčmi 1-3, 2-4 atď. V porovnaní s hlavným maximom je toto menšie, keďže k nemu prispieva iba polovica dvojíc štrbín. Minimá potom dostávame pre podmienku

$$k\,2d\sin\varphi_{\min 1} = \pi, \text{ odkiaľ máme } \sin\varphi_{\min 1} = \frac{\lambda}{4d}.$$

Podobne môžeme uvažovať konštruktívnu interferenciu dvojíc 1–4, 2–5 atď. , ktorých 3× menej. Poslednou možnosťou je rozdelenie štrbín 1–$N/2$, atď., pre ktoré dostávame prvé difrakčné minimum

$$k\frac{N}{2}d\sin\varphi_{\min 1} = \pi, \text{ odkiaľ máme } \sin\varphi_{\min 1} = \frac{\lambda}{N\,d}.$$

Medzi hlavným maximom a nasledujúcim hlavným minimom tak existuje $N/2$ vedľajších menších maxím a miním. Uhlový rozdiel susedných miním (šírka maxima)

$$\Delta\varphi_{\min} = 2\arcsin\frac{\lambda}{N\,d}, \text{ pre veľké } N \text{ dostávame } \Delta\varphi_{\min} = \frac{2\lambda}{N\,d}.$$

čo predstavuje šírku všetkých maxím, hlavného i menších vedľajších. Hlavné maximá sú tak veľmi ostré. Šírka hlavného maxima určuje rozlišovaciu schopnosť mriežky.
Pre dve blízke vlnové dĺžky určíme rozdiel uhlov prvého hlavného difrakčného maxima. Diferencujeme vzťah

$$\sin\varphi_{\max 1} = \frac{\lambda}{d} \quad \rightarrow \quad \text{, a teda } \cos\varphi_{\max 1}\,\Delta\varphi_{\max} = \frac{\Delta\lambda}{d}, \text{ odkiaľ } \Delta\varphi_{\max} = \frac{\Delta\lambda}{d\cos\varphi_{\max 1}}.$$

Z podmienky $\Delta\varphi_{\min} = \Delta\varphi_{\max}$ dostaneme

$$N = \frac{2\lambda}{\Delta\lambda}\cos\varphi_{\max 1}, \text{ a teda } D = N\,d = \frac{2\lambda^2}{\Delta\lambda}\frac{1}{\tan\varphi_{\max 1}} = 2{,}00 \text{ mm}.$$

**Fyzikálna olympiáda – 67. ročník – teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A**
Návrh a spracovanie úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Konrád
Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2026