

66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
krajské kolo kategória C
riešenie úloh

1. Postrekovač

Riešenie:

- a) Pohyb vody nad trávnikom predstavuje šikmý vrh, pre ktorý platia vzťahy pre rýchlosť a súradnice

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha & v_y &= v_0 \sin \alpha - g t \\x &= v_0 t \cos \alpha & y &= h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

Ak má voda dopadať do vzdialenosti L , platí

$$L = v_0 t_1 \cos \alpha \quad 0 = h + v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Z prvého vzťahu vyjadríme čas t_1 dopadu a dosadíme ho do druhého vzťahu

$$t_1 = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$$

a po dosadení a úprave

$$v_0 = \frac{L}{2 \cos \alpha} \sqrt{\frac{2g}{L \tan \alpha + h}} = 12,17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Objemový prietok dýzou $Q_V = S_2 v_0$. Vo vzduchu je voda, ktorá prešla ústím dýzy na čas t_1 . Objem tejto vody

$$V = Q_V t_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_0 t_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} \frac{L}{\cos \alpha} = 1,44 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,44 \text{ litra}.$$

- b) Rýchlosť prúdenia vody v hadici určíme z rovnice spojitosti toku

$$S_1 v_1 = S_d v_0, \text{ resp. } v_1 = \frac{S_d}{S_1} v_0 = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 v_0$$

Prúdenie vody opisuje Bernoulliho rovnica

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + p_a + \rho g h,$$

odkiaľ máme

$$p = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v_1^2) + \rho g h + p_a = \frac{1}{2} \rho \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right] v_0^2 + \rho g h + p_a$$

a po dosadení za rýchlosť v_0

$$p = \frac{1}{2} \rho \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right] \left(\frac{L}{2 \cos \alpha} \right)^2 \frac{2g}{L \tan \alpha + h} + \rho g h + p_a = 180 \text{ kPa}.$$

2. Vrh z rampy

Riešenie:

- a) Ak neuvažujeme trenie, nedochádza ani k rotácii gule a pohyb je iba posuvný, pričom sa zachováva mechanická energia

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1, \text{ odkiaľ máme } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 g h_1}.$$

Pre dané hodnoty $v_1 = 29,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- b) Po opustení rampy ide o šikmý vrh so začiatočnou rýchlosťou v_1 a uhlom vrhu

$$\alpha = \arcsin \frac{h_1}{\ell}.$$

Pre súradnice vzhľadom na päť P hradby

$$x = v_1 t \cos \alpha \quad y = h_2 + v_1 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pre bod dopadu platí $x = d$, $y = 0$. Po dosadení vyjadríme čas t_D dopadu z prvej rovnice a ten dosadíme do druhej rovnice

$$t_D = \frac{d}{v_1 \cos \alpha} \text{ a } 0 = h_2 + v_1 \frac{d}{v_1 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_1 \cos \alpha} \right)^2.$$

Rovnicu upravíme na tvar kvadratickej rovnice pre d

$$d^2 - 2 d \frac{v_1^2}{g} \cos^2 \alpha \tan \alpha - \frac{2 h_2 v_1^2}{g} \cos^2 \alpha = 0,$$

ktorá má riešenie $d = \frac{v_1^2}{g} \cos^2 \alpha \tan \alpha \pm \sqrt{\left(\frac{v_1^2}{g} \cos^2 \alpha \tan \alpha \right)^2 + \frac{2 h_2 v_1^2}{g} \cos^2 \alpha}$

a po úprave (pre $d > 0$ platí znamienko +)

$$d = \frac{v_1^2}{g} \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 g h_2}{v_1^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

a po dosadení za v_1 a $\sin \alpha$

$$d = \frac{v_0^2 - 2 g h_1}{g} \frac{h_1}{\ell} \sqrt{1 - \frac{h_1^2}{\ell^2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{h_1^2} \frac{2 g h_2}{v_0^2 - 2 g h_1}} \right).$$

Pre dané hodnoty $d = 100 \text{ m}$.

- c) Rýchlosť dopadu určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - m g (h_2 - h_1), \text{ odkiaľ máme } v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2 g (h_2 - h_1)}.$$

Uhol dopadu určuje vzťah $\tan \beta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}$, kde $v_{2x} = v_1 \cos \alpha$ a $v_{2y} = v_1 \sin \alpha - g t_D$.

Po dosadení za v_1 , $\sin \alpha$ a t_D dostaneme $\tan \beta = \frac{v_1 \sin \alpha - g t_D}{v_1 \cos \alpha} = \tan \alpha - \frac{g d}{v_1^2 \cos^2 \alpha}$

a po úprave $\beta = -\arctan \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{\ell^2 - h_1^2}} \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{h_1^2} \frac{2 g h_2}{v_0^2 - 2 g h_1}} \right\}.$

Pre dané hodnoty $v_2 = 33,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\beta = -52^\circ$.

3. Rýchlovarná kanvica

Riešenie:

- a) Príkion kanvice určíme zo vzťahu pre teplo dodané vode

$$Q_1 = \eta P_1 \tau_1 = \rho V_1 c (t_2 - t_1), \quad (1)$$

odkiaľ dostávame

$$P_1 = \frac{\rho V_1 c}{\eta \tau_1} (t_2 - t_1) = 2,86 \text{ kW}. \quad (2)$$

Prúd prívodom

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{\rho V_1 c}{\eta U_1 \tau_1} (t_2 - t_1) = 12,4 \text{ A} \quad (3)$$

a odpor vykurovacieho telesa

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\eta U_1^2 \tau_1}{\rho V_1 c (t_2 - t_1)} = 18,5 \, \Omega. \quad (4)$$

- b) Teplotná závislosť odporu je daná vzťahom

$$R_1 = R_0 [1 + \alpha (t_3 - t_0)], \quad (5)$$

z ktorého dostávame teplotu vykurovacej špirály chladenej zohrievanou vodou

$$t_3 = t_0 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_1}{R_0} - 1 \right) = 217 \, ^\circ\text{C}. \quad (6)$$

- c) Teplo dodané vode pri zníženom výkone

$$Q_2 = \eta P_2 \tau_2 = \rho V_2 c (t_2 - t_1). \quad (7)$$

Z (1) a (7) dostávame

$$P_2 = \frac{\rho V_2 c}{\eta \tau_2} (t_2 - t_1) = 2,56 \text{ kW}. \quad (8)$$

Ak uvažíme priemerný tepelný výkon v prvom a druhom prípade

$$\frac{Q_1}{\tau_1} = k (t_3 - t_s) \quad \text{a} \quad \frac{Q_2}{\tau_2} = k (t_4 - t_s).$$

S použitím (1) a (7) dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_3 - t_s}{t_4 - t_s}, \text{ a teda}$$

$$t_4 = \frac{P_2}{P_1} (t_3 - t_s) + t_s = \frac{V_2}{V_1} \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(t_3 - \frac{t_1 + t_2}{2} \right) + \frac{t_1 + t_2}{2} = 200,5 \, ^\circ\text{C}.$$

Odpor špirály

$$R_2 = R_0 [1 + \alpha (t_4 - t_0)] = 18,2 \, \Omega.$$

Príkion vyjadríme vzťahom

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}, \text{ odkiaľ máme } U_2 = \sqrt{P_2 R_2} = 216 \text{ V}.$$

4. Mostík LK

Riešenie:

- a) Prúd $U_Z/R_1 = 9,6 \text{ mA}$, čo je hodnota väčšia ako nameraná hodnota $I_1 = 7,5 \text{ mA}$. Je to spôsobené vnútorným odporom R_v článku, ktorý je zaradený sériovo s rezistorom R_1

$$I_1 = \frac{U_Z}{R_1 + R_v}, \text{ odkiaľ máme } R_v = \frac{U_Z}{I_1} - R_1 = 44 \, \Omega.$$

- b) Ďalšie prúdy sú

$$I_2 = \frac{U_Z}{R_2 + R_v} = \frac{U_Z}{U_Z + (R_2 - R_1)I_1} I_1 = 4,21 \text{ mA}.$$

$$I_3 = \frac{U_Z}{R_3 + R_v} = \frac{U_Z}{U_Z + (R_3 - R_1)I_1} I_1 = 2,93 \text{ mA}.$$

- c) Vyjadríme prúd v obvode $I_4 = \frac{U_Z}{R_4 + R_v}$, odkiaľ máme

$$R_4 = \frac{U_Z}{I_4} - R_v = U_Z \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_1} \right) + R_1 = 608 \, \Omega.$$

- d) Ak je spínač rozopnutý, sú sériové vetvy $R_1 R_3$ a $R_2 R_4$ zaradené paralelne. Odpor mostíka

$$R_R = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4} = 372 \, \Omega$$

a prúd zdroja $I_R = \frac{U_Z}{R_R + R_v} = 3,61 \text{ mA}.$

- e) Keď je spínač zopnutý, sú dvojice paralelných rezistorov $R_1 R_2$ a $R_3 R_4$ zapojené sériovo. Celkový

odpor mostíka $R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 368 \, \Omega.$

Prúd zdroja $I_Z = \frac{U_Z}{R_Z + R_v} = 3,64 \text{ mA}.$

Dvojice $R_1 R_2$ a $R_3 R_4$ predstavujú prúdové deliče, na ktorých sa prúd I_Z delí do jednotlivých rezistorov. Prúd rezistora R_1 a prúd rezistora R_3

$$I_{R1} = I_Z \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_{R3} = I_Z \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Prúd spínačom je rozdiel prúdov I_{R1} a I_{R3}

$$I_{CD} = I_{R1} - I_{R3} = I_Z \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = I_Z \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} = 0,37 \text{ mA}.$$

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy krajského kola kat. C

Návrh a úprava úloh:	Lubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh:	Lubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydalo:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže Bratislava 2025