

66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
krajské kolo kategória B
text úloh

1. Tiažové zrýchlenie

Riešenie:

- a) Vzdialenosti bodov na Zemi na privrátenej a odvrátenej strane sú rôzne, a teda intenzita gravitačného poľa Mesiaca je odlišná čo do veľkosti a smeru. To sa prejaví rozdielom tiažového zrýchlenia, na privrátenej strane znížením, na odvrátenej strane zvýšením

$$\Delta g_{gp} = -E_{gp} = -G \frac{M_M}{(R_{ZM} - R_Z)^2} \text{ - gravitácia Mesiaca tiažové zrýchlenie znižuje}$$

$$\Delta g_{go} = -E_{go} = G \frac{M_M}{(R_{ZM} + R_Z)^2} \text{ - gravitácia Mesiaca tiažové zrýchlenie zvyšuje.}$$

Pre dané hodnoty veličín $\Delta g_{gp} = -3,44 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $\Delta g_{go} = +3,22 \times 10^{-5}$.

- b) Zem a Mesiac obiehajú okolo spoločného hmotného stredu po kružnicových trajektóriách. Polomer trajektórie Zeme

$$r_Z = \frac{M_M}{M_Z + M_M} R_{ZM} .$$

$$\frac{r_Z}{R_Z} = \frac{M_M}{M_Z + M_M} \frac{R_{ZM}}{R_Z}$$

Pre dané hodnoty $r_Z = 4670 \text{ km}$, $r_Z / R_Z = 0,732$.

Hmotný stred sa nachádza približne v $\frac{3}{4}$ polomeru Zeme.

- c) Zmenu tiažového zrýchlenia spôsobuje zotrvačná (odstredivá sila). Keďže stred trajektórie sa nachádza pod povrchom Zeme, na odvrátenej i privrátenej strane je orientovaná proti smeru tiažového zrýchlenia.

$$\Delta g_{np} = -\omega^2 (R_Z - r_Z) \text{ a } \Delta g_{no} = -\omega^2 (R_Z + r_Z),$$

kde ω je uhlová rýchlosť obiehania Zeme okolo hmotného stredu sústavy Z–M.

$$M_Z \omega^2 r_Z = G \frac{M_M M_Z}{R_{ZM}^2},$$

odkiaľ máme

$$\omega^2 = G \frac{M_M}{R_{ZM}^2 r_Z} = G \frac{M_Z + M_M}{R_{ZM}^3} .$$

Po dosadení máme

$$\Delta g_{np} = -G \frac{M_Z + M_M}{R_{ZM}^3} \left(R_Z - \frac{M_M}{M_Z + M_M} R_{ZM} \right)$$

$$\Delta g_{\text{no}} = -G \frac{M_Z + M_M}{R_{ZM}^3} \left(R_Z + \frac{M_M}{M_Z + M_M} R_{ZM} \right).$$

Pre dané hodnoty $\Delta g_{\text{np}} = -1,22 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $\Delta g_{\text{no}} = -7,87 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- d) Výsledná zmena tiažového zrýchlenia spôsobená vplyvom Mesiaca je na strane privrátenej k Mesiacu. Po dosadení a úprave

$$\Delta g_{\text{p}} = \Delta g_{\text{gp}} + \Delta g_{\text{np}} = -\frac{G M_M R_Z}{R_{ZM}^3} \left[\frac{R_{ZM} (2R_{ZM} - R_Z)}{(R_{ZM} - R_Z)^2} + \frac{M_Z}{M_M} + 1 \right]$$

$$\Delta g_{\text{o}} = \Delta g_{\text{go}} + \Delta g_{\text{no}} = -\frac{G M_M R_Z}{R_{ZM}^3} \left[\frac{R_{ZM} (2R_{ZM} + R_Z)}{(R_{ZM} + R_Z)^2} + \frac{M_Z}{M_M} + 1 \right].$$

Pre dané hodnoty $\Delta g_{\text{p}} = -4,66 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\Delta g_{\text{o}} = -4,65 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Uvedené hodnoty predstavujú $\Delta g / g = 4,7 \times 10^{-6} = 4,7 \text{ ppm}$.

Z výsledku je zrejmé, že v dôsledku rotácie Zeme počas dňa sú dva prílivy približne rovnaké.

2. Zavesená tyč

Riešenie:

- a) Obr. RB–1 (Ťažisko pod bodom závesu)
 b) V stave rovnováhy ťažisko T tyče sa nachádza na zvislej priamke prechádzajúcej bodom O závesu.

Pre trojuholník ABO platí kosínusová veta

$$L^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 - 2\ell_1\ell_2\cos(\beta + \gamma), \quad (1)$$

pričom

$$\sin \beta = \frac{1}{\ell_1} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)$$

$$\text{a} \quad \sin \gamma = \frac{1}{\ell_2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right). \quad (2)$$

Ak uvažíme $\cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma$,

Z uvedených vzťahov dostávame po úprave

$$\cos \alpha = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{4\ell_1^2\ell_2^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2 - L^2)^2}{2\ell_1^2 + 2\ell_2^2 - L^2}}. \quad (3)$$

Pre dané hodnoty $\cos \alpha = 0,902$, a teda $\alpha = 26^\circ$.

- c) Určíme vzdialenosť ťažiska od osi otáčania

$$a = \frac{1}{2} (\ell_1 \cos \beta + \ell_2 \cos \gamma) = \frac{1}{2} \left(\ell_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_1^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} + \ell_2 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_2^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} \right)$$

a po úprave

$$a = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{9\ell_1^4 + (\ell_2^2 - L^2)(6\ell_1^2 + \ell_2^2 - L^2)}{2\ell_1^2 + 2\ell_2^2 - L^2}} + \sqrt{\frac{9\ell_2^4 + (\ell_1^2 - L^2)(6\ell_2^2 + \ell_1^2 - L^2)}{2\ell_1^2 + 2\ell_2^2 - L^2}} \right).$$

Pre dané hodnoty $a = 65,2$ cm.

- d) V stave rovnováhy platí rovnováha síl a momentov síl pôsobiacich na tyč.

Pre zložky síl vo vodorovnom a zvislom smere máme

$$F_1 \sin \beta - F_2 \sin \gamma = 0 \quad (4)$$

$$F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma - F_g = 0, \quad (5)$$

pre rovnováhu momentov síl vzhľadom na bod O závesu

$$F_1 \cos \beta \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right) - F_2 \cos \gamma \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right) = 0. \quad (6)$$

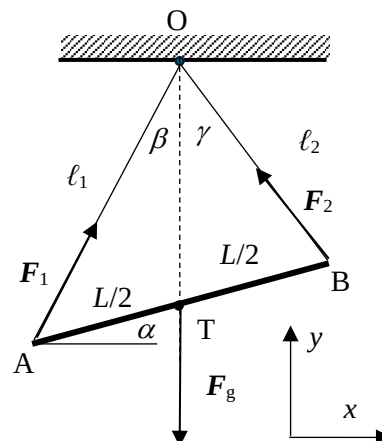
S použitím vzťahov (2) rovnice upravíme na tvar. Rovnicu (4) na tvar

$$F_1 \frac{1}{\ell_1} = F_2 \frac{1}{\ell_2}, \quad (7)$$

rovniciu (5) na tvar

$$F_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_1^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} + F_2 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_2^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} = F_g \quad (8)$$

a rovnicu (6)



Obr. RB2–1

$$F_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_1^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} - F_2 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_2^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} = 0. \quad (9)$$

Z rovníc (8) a (9) dostávame

$$2F_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\ell_1^2} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha \right)^2} = F_g,$$

odkiaľ

$$F_1 = \frac{F_g}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2\ell_1} \right)^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{mg}{2 \sqrt{1 - \frac{4\ell_1^2 \ell_2^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2 - L^2)^2}{4\ell_1^2 (2\ell_1^2 + 2\ell_2^2 - L^2)}}}.$$

Podobne

$$F_2 = \frac{F_g}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2\ell_2} \right)^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{mg}{2 \sqrt{1 - \frac{4\ell_1^2 \ell_2^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2 - L^2)^2}{4\ell_2^2 (2\ell_1^2 + 2\ell_2^2 - L^2)}}}.$$

Pre dané hodnoty $F_1 = 10,7 \text{ N}$ a $F_2 = 12,3 \text{ N}$.

- e) Sústavu môžeme považovať za tuhé teleso, ktoré kmitá okolo osi O. Pre kmity v tiažovom poli platí zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + m g h = \text{konšt.},$$

kde φ je uhol vychýlenia, $\dot{\varphi}$ uhlová rýchlosť otáčania, $h = a(1 - \cos \varphi)$ je zvislé vychýlenie ťažiska, pričom a je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania a $J = J_o + m a^2$ je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os O, pričom $J_o = (1/12) m L^2$ je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom.

Pre malé výchylky $\varphi < 5^\circ$ vyjadríme približný vzťah pre potenciálnu energiu

$$E_p = m g h = m g a (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} m g a \varphi^2 = \frac{1}{2} k \varphi^2, \text{ kde } k = m g a.$$

Periódou malých kmitov je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g a} \left(\frac{1}{12} L^2 + a^2 \right)}.$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $T = 1,72 \text{ s}$.

3. Vlhkosť v atmosfére

Riešenie:

- a) Určíme počet molekúl v objeme V plynu

$$p_n V = n R T_0 = \frac{m}{M_m} R T_0 = N k_B T_0,$$

$$\text{odkiaľ } \frac{m}{V} = \frac{p_n M_m}{R T_0} = 17,3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$$

Vyjadríme objem pripadajúci na jednu molekulu a považujeme ju za kocku so stranou a

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T_0}{p_n} = a^3, \text{ a teda } a = \sqrt[3]{\frac{k_B T_0}{p_n}} = 12,0 \text{ nm}$$

Počet molekúl v objeme $V = 1 \text{ m}^3$

$$\frac{N}{V} = \frac{p_n}{k_B T_0} = 5,78 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}.$$

- b) Teplotu vyjadríme vzťahom

$$t = t_0 - k h, \text{ resp. } h = \frac{t_0 - t}{k}. \quad (1)$$

Stavová rovnica pre vodnú paru

$$p_v V = \frac{m}{M_m} R T, \text{ resp. } p_v = \frac{\rho_v}{M_m} R T, \quad (2)$$

kde $\rho_v = \frac{p_v M_m}{R T}$ je hustota vodnej pary.

Zmena tlaku vodnej pary s výškou je vyjadrená vzťahom

$$dp_v = -\rho_v g dh. \quad (3)$$

Hustotu z rovnice (3) dosadíme do rovnice (2) a teplotu nahradíme jej závislosťou od výšky

$$p_v = -\frac{dp_v}{M_m g dh} R T, \text{ resp. } \frac{dp_v}{p_v} = -\frac{M_m g}{R T} dh = -\frac{M_m g}{R (T_0 - k h)} dh = \frac{M_m g}{k R} \frac{dh}{h - \frac{T_0}{k}}.$$

Rovnicu vyjadríme vo výslednom tvare diferenciálnej rovnice

$$\frac{1}{p_v} \frac{dp_v}{dh} = \frac{M_m g}{k R} \frac{1}{h - \frac{T_0}{k}}.$$

Rovnicu integrujeme podľa výšky

$$\int_0^h \left(\frac{1}{p_v} \frac{dp_v}{dh} \right) dh = \int_0^h \left(\frac{M_m g}{k R} \frac{1}{h - \frac{T_0}{k}} \right) dh, \text{ resp. } \int_0^h \left(\frac{1}{p_v} \frac{dp_v}{dh} \right) dh = \int_0^h \left(\frac{M_m g}{k R} \frac{1}{h - \frac{T_0}{k}} \right) dh$$
$$\int_{p_0}^{p_v} \frac{dp}{p} = \frac{M_m g}{k R} \int_0^h \frac{dh}{h - \frac{T_0}{k}}.$$

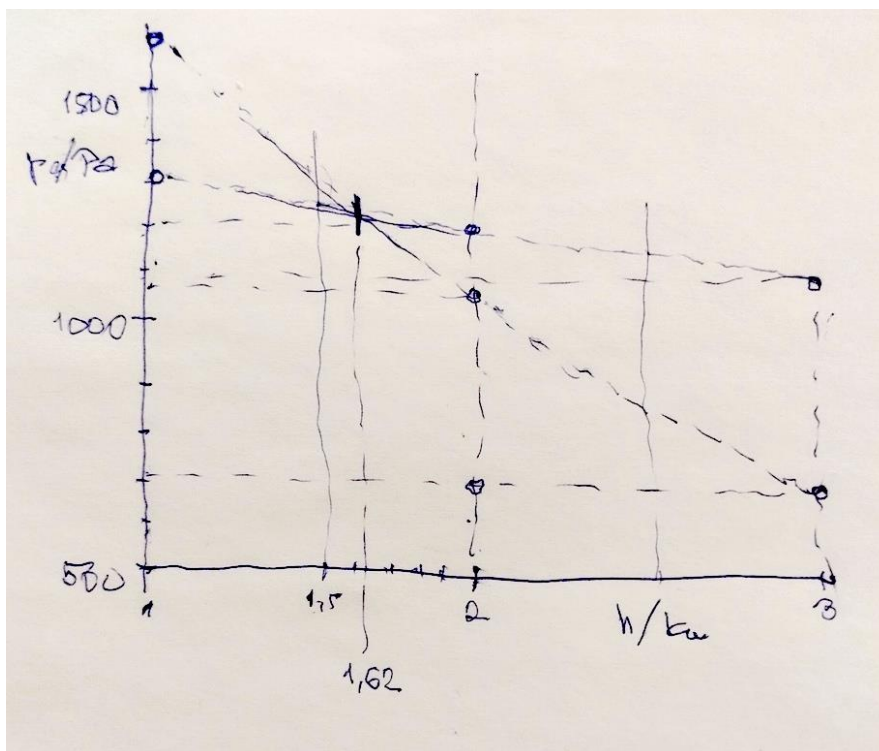
Po integrácii $\ln \frac{p_v}{p_0} = \frac{M_m g}{k R} \ln \frac{T_0 - k h}{T_0}$ a po úprave

$$p_v = p_0 \left(1 - \frac{k h}{T_0} \right)^{\frac{M_m g}{k R}}, \text{ kde } p_0 = \eta p_a(20^\circ)$$

c) Doplnená tabuľka

$t / ^\circ\text{C}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
p_n / Pa	706	813	935	1073	1228	1402	1598	1817	2063	2337
h / km	3,00	2,67	2,33	2,00	1,67	1,33	1,00	0,67	0,33	0
p_v / Pa	1120			1209			1303			1402

d) Graf funkcie



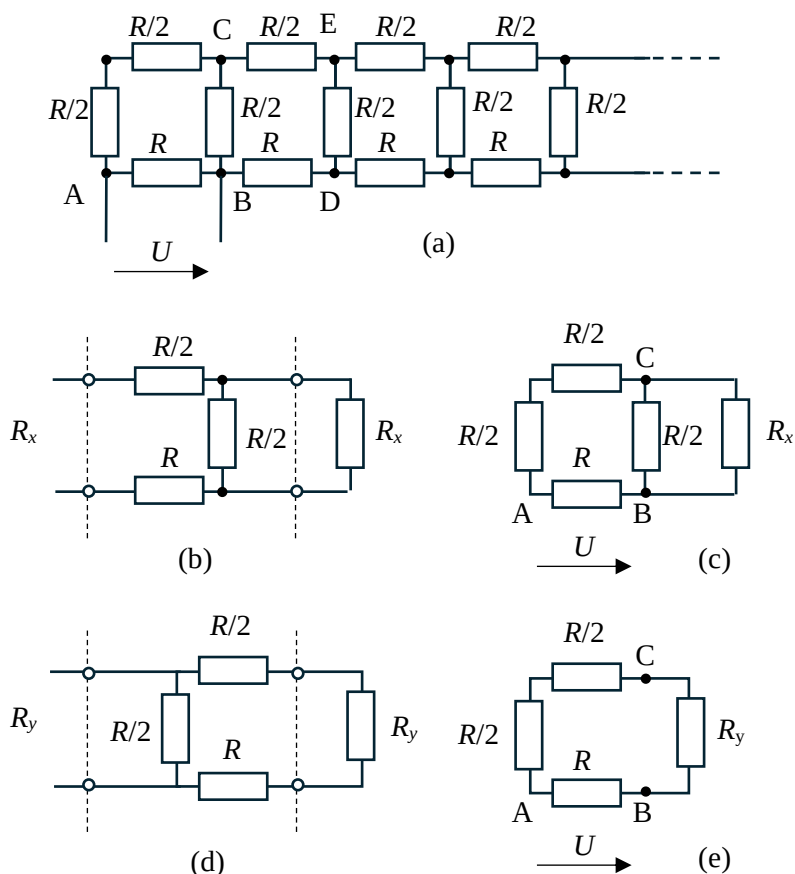
Mraky sa vytvárajú, keď parciálny tlak p_v vodnej pary dosiahne tlak p_n nasýtenej pary pri danej teplote. Výška, v ktorej vznikajú mraky je určená priesečníkom kriviek. Z grafu od ruky vychádza výška $h_m \approx 1,62$ km.

Pozn.: Presným výpočtom je výsledok $h_m = 1,65$ km.

4. Elektrický obvod

Riešenie:

Keďže sieť je symetrická okolo strednej osi, je potenciál uzlov pod osou rovnaký ako potenciál uzlov symetrických vzhľadom na os nad osou. Môžeme preto tieto uzly spojiť bez toho, aby sa odpor medzi uzlami A a B. Dostávame tak sieť podľa obr. RB2–2 (a).



Obr. RB2–2

Keďže reťazec považujeme od uzlov B a C za nekonečný a s periodickou štruktúrou, môžeme ho nahradiť jeho vstupným odporom. Za základnú a pravidelne sa opakujúcu bunku reťazca môžeme považovať i) obrátený C-článok, obr. (b), alebo ii) C-článok, obr. (d). Ak je reťazec veľmi dlhý (nekonečný), pridaním jedného článku sa vstupný odpor nezmení.

i) V prvom prípade podľa obr. (b) označíme vstupný odpor R_x . Potom platí

$$R_x = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} R_x}{\frac{R}{2} + R_x} + R$$

Odtiaľ dostávame rovnicu

$$R_x^2 - \frac{3R}{2} R_x - \frac{3R^2}{4} = 0,$$

ktorej riešenia je

$$R_x = \frac{3}{4} R \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4} R\right)^2 + \frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{4} R (3 + \sqrt{21}), \text{ platí iba znamienko } + \text{ pre } R_x > 0.$$

Celý obvod nahradíme schémou podľa obr. (c). Odpor medzi uzlami A a B

$$R_{AB} = \frac{R \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} R_x}{\frac{R}{2} + R_x} \right)}{R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} R_x}{\frac{R}{2} + R_x}} = \frac{R + 3R_x}{2R + 5R_x} R.$$

Po dosadení za R_x a úprave máme

$$R_{AB} = \frac{13 + 3\sqrt{21}}{23 + 5\sqrt{21}} R = \frac{(13 + 3\sqrt{21})(23 - 5\sqrt{21})}{(23 + 5\sqrt{21})(23 - 5\sqrt{21})} R = (\sqrt{21} - 4) R$$

ii) V druhom prípade podľa obr. (d) označíme vstupný odpor R_y .

$$R_y = \frac{\frac{R}{2} \left(\frac{R}{2} + R_y + R \right)}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R_y + R} = \frac{3R + 2R_y}{2R + R_y} \frac{R}{4},$$

odkiaľ dostávame rovnicu

$$R_y^2 + \frac{3}{2} R R_y - \frac{3}{4} R^2 = 0,$$

ktorá má riešenie

$$R_y = -\frac{3}{4} R \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4} R\right)^2 + \frac{3}{4} R^2} = (\sqrt{21} - 3) \frac{R}{4}.$$

Podľa schémy (e) máme

$$R_{AB} = \frac{R(R + R_y)}{2R + R_y} = \frac{\sqrt{21} + 1}{\sqrt{21} + 5} R = (\sqrt{21} - 4) R.$$

Oba postupy vedú k rovnakému výsledku.

Stačí riešenie jedným spôsobom.

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy krajského kola kat. B

Návrh a úprava úloh:	Lubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh:	Lubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydalo:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže Bratislava 2025