

66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
domáce kolo kategória D
riešenie úloh

1. Rozbeh vlaku

Riešenie:

- a) Pre pohyb prvého vagóna okolo okna platí

$$\ell_L = \frac{1}{2} a t_1^2, \text{ odkiaľ máme } a = \frac{2\ell_L}{t_1^2}. \text{ Pre dané hodnoty } a = 0,109 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

- b) Za čas t_2 prejde okolo okna lokomotíva a n vagónov s dĺžkou.

$$\ell_L + n\ell_V = \frac{1}{2} a t_2^2 = \ell_L \frac{t_2^2}{t_1^2}, \text{ odkiaľ máme } n = \frac{\ell_L}{\ell_V} \left(\frac{t_2^2}{t_1^2} - 1 \right).$$

Pre dané hodnoty $n = 30$.

- c) Posledný vagón prechádzal rýchlosťou

$$v_n = a t_2 = \frac{2\ell_L}{t_1^2} t_2. \text{ Pre dané hodnoty } v_n = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 35 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

- d) Ťahová sila je rovná sile statického trenia medzi kolesami a koľajnicami

$$F_L \leq f m_L g = F_{Lm}. \text{ Pre dané hodnoty } F_{Lm} = 333 \text{ kN}.$$

Vidíme, že motory lokomotívy využívajú takmer úplne túto teoretickú možnosť.

- e) Pri rovnomernom pohybe na vodorovnej trati je hlavná odporová sila valivého odporu

$$F_o = \frac{\xi}{R_L} m_L g + n \frac{\xi}{R_V} m_V g. \text{ Pre dané hodnoty } F_o = 20,1 \text{ kN}.$$

Výkon motorov lokomotívy potrebný na prekonanie tohto odporu

$$P_L = F_o v_0 = \xi \left(\frac{m_L}{R_L} + n \frac{m_V}{R_V} \right) g v_0. \text{ Pre dané hodnoty } P_L = 503 \text{ kW}.$$

- f) Na trati so sklonom $s = 1\%$ (10 m/1 km) pôsobí proti smeru pohybu zložka tiažovej sily $F = s(m_L + n m_V)g$. S uvažovaním valivého odporu musí lokomotíva prekonať silu

$$F = s(m_L + n m_V)g + F_o. \text{ Pre dané hodnoty } F = 264 \text{ kN}.$$

Lokomotíva s maximálnym ťahom $F_{Lmax} = 300 \text{ kN}$ je schopná túto silu prekonať.

Pri využití maximálneho výkonu je rýchlosť

$$v = \frac{P_{Lmax}}{F} = \frac{P_{Lmax}}{s(m_L + n m_V)g + F_o} = \frac{P_{Lmax}}{g} \frac{1}{\left(s + \frac{\xi}{R_L}\right) m_L + \left(s + \frac{\xi}{R_V}\right) n m_V}.$$

Pre dané hodnoty $v = 21,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 76,5 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Lokomotíva stúpanie prekoná, ale pri menšej rýchlosti.

2. Cesta vlakom

Riešenie:

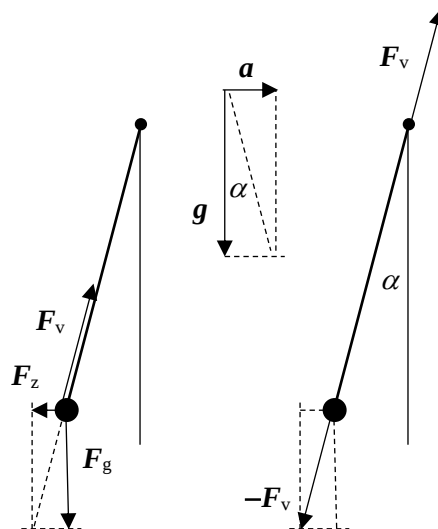
- a) Obr. RD–1. Sily možno nakresliť do jedného obrázku napr. rôznymi farbami.

V neinerciálnej vzťažnej sústave spojenej s vlakom pôsobí na guľôčku sila tiažová $\mathbf{F}_g = m \mathbf{g}$, zotrvačná sila $\mathbf{F}_z = -m \mathbf{a}$, kde $\mathbf{a}$ je zrýchlenie sústavy, a sila $\mathbf{F}_v$ ťahu nite. V stálej polohe sú všetky sily v rovnováhe, vektorový súčet je nulový,

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_z + \mathbf{F}_v = 0.$$

Na napnutú niť pôsobia sily ťahu guľôčky $-\mathbf{F}_v$ a sila ťahu upevnenia $\mathbf{F}_v$. Vzhľadom na predpoklad neuvažujeme tiažovú silu nite.

Keďže výchylka bola na prvom úseku stála, išlo o rovnomerne zrýchlený pohyb. V ďalšom úseku s nulovou výchylkou išlo o rovnomerný pohyb, a v treťom úseku so stálou výchylkou išlo o rovnomerne spomalený pohyb.



Obr. RD–1

- b) Niť má smer výslednice síl $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_z$. Pre odchýlku nite α_1 proti smeru pohybu vlaku tak dostávame

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_{z1}}{F_g} = \frac{a}{g}.$$

Odtiaľ dostávame zrýchlenie pohybu $a_1 = g \tan \alpha_1$, pre dané hodnoty $a_1 = 0,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Vlak dosiahne za čas t_1 maximálnu rýchlosť

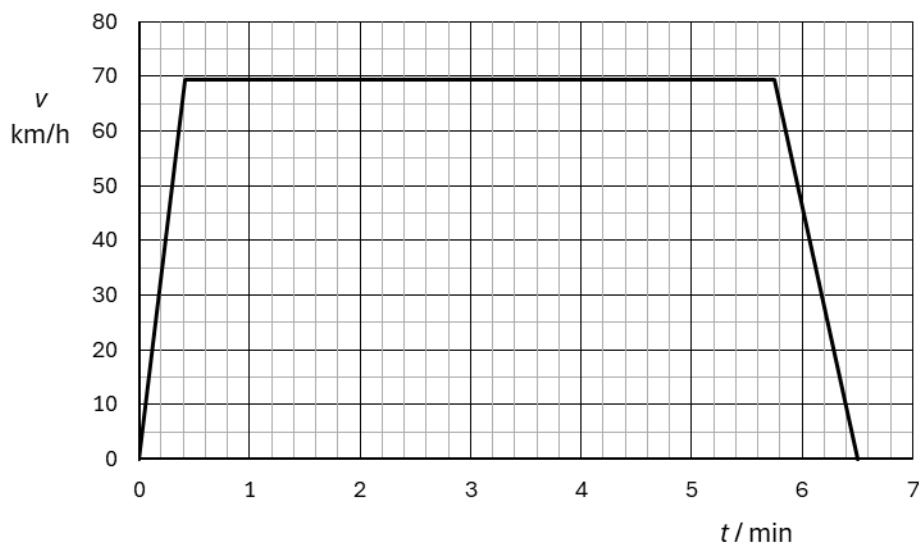
$$v_m = a_1 t_1 = g t_1 \tan \alpha_1, \text{ pre dané hodnoty } v_m = 19,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 69,4 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}.$$

- c) Pri spomalenom pohybe sa niť s guľôčkou vychýli o uhol α_2 na opačnú stranu, tzn. v smere pohybu vlaku. Zrýchlenie je $a_2 = -g \tan \alpha_2$. Rýchlosť rovnomerne spomaleného pohybu sa mení podľa vzťahu $v = v_m + a_2 t$. Pre konečnú rýchlosť $v = 0$ dostávame čas brzdenia

$$t_3 = -\frac{v_m}{a_2} = \frac{v_m}{g \tan \alpha_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} t_1. \text{ Pre dané hodnoty } t_3 = 45 \text{ s}.$$

- d) Obr. RD–2.

Správne nakreslený graf: označenie rovnomernej stupnice, veličín a jednotiek na osiach, graf pokrýva podstatnú časť plochy, správne zakreslenie čiary grafu.



Obr. RD-2

- e) Celková dráha pozostáva z troch úsekov, dvoch rovnomerne zrýchlených a jedného rovnomerného

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_m t_2 + \left(v_m t_3 + \frac{1}{2} a_2 t_3^2 \right) = \frac{1}{2} g t_1^2 \tan \alpha_1 + g t_1 t_2 \tan \alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{\tan^2 \alpha_1}{\tan \alpha_2} g t_1^2,$$

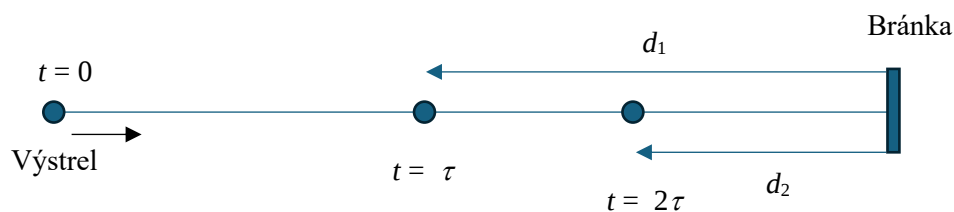
po úprave

$$s = \frac{1}{2} g t_1^2 \left(1 + 2 \frac{t_2}{t_1} + \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \right) \tan \alpha_1.$$

Pre dané hodnoty $s = 6,85$ km.

3. Pohyb puku

Riešenie:



- a) Puk je brzdený konštantnou odporovou silou $F = -f m g$, ktorá spôsobí oneskorenie $a = f g$, a preto ide o rovnomerne spomalený pohyb.

Ak uvažuje začiatočnú rýchlosť v_0 a vzdialenosť hráča od cieľa d , platí

$$D - d_1 = v_0 \tau - \frac{1}{2} a \tau^2$$

$$\text{a} \quad D - d_2 = v_0 2\tau - \frac{1}{2} a (2\tau)^2.$$

Z týchto rovníc určíme zrýchlenie

$$a = \frac{D + d_2 - 2d_1}{\tau^2} \quad (= 0,816 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$$

a faktor trenia

$$f = \frac{a}{g} = \frac{D + d_2 - 2d_1}{g \tau^2} . \text{ Pre dané hodnoty } f = 0,083.$$

b) Začiatočná rýchlosť

$$v_0 = \frac{3D - 4d_1 + d_2}{2\tau} . \text{ Pre dané hodnoty } v_0 = 8,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Pre prechod bránkovou čiarou platí $d = 0$, tzn.

$$D = v_0 t_b - \frac{1}{2} a t_b^2 ,$$

a teda

$$v_b = \sqrt{v_0^2 - 2ad} = \frac{1}{2\tau} \sqrt{(4d_1 - d_2)^2 + d(d - 8d_1 - 2d_2)} .$$

pre dané hodnoty $v_b = 7,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

d) Pre zastavenie platí

$$D - d_z = v_0 t_z - \frac{1}{2} a t_z^2$$

$$v = v_0 - a t_z = 0 .$$

Z týchto rovníc určíme čas zastavenia

$$t_z = \frac{v_0}{a} = \frac{3D - 4d_1 + d_2}{D + d_2 - 2d_1} \frac{\tau}{2} . \text{ Pre dané hodnoty } t_z = 10,9 \text{ s}.$$

Vzdialenosť miesta zastavenia od bránkovej čiary

$$d_z = D - \frac{(3D - 4d_1 + d_2)^2}{8(D + d_2 - 2d_1)} .$$

Pre dané hodnoty $d_z = -33 \text{ m}$, tzn. až 33 m za bránkovou čiarou.

4. Sústava telies

Riešenie:

a) Obr. RD–3

Na kladku K1 pôsobia 4 sily: vlastná tiažová sila, sily ťahu vlákna a reakčná sila v osi kladky.

Na kladku K2 pôsobia 4 sily: tiažová a tri ťahové sily vlákien.

Na telesá T1, T2 a T3 pôsobia vždy 2 sily: tiažová a ťahová sila vlákna, na ktorom sú zavesené.

b) V ďalšom zanedbáme tiažové sily kladiek a momenty zotrvačnosti kladiek.

Ak neuvažujeme momenty zotrvačnosti kladiek, platí

$$F_{v1} = F_{v23} \text{ a } F_{v2} = F_{v3}.$$

Po uvoľnení sa pohybujú telesá T1, T2 a T3 so zrýchleniami a_1 , a_2 a a_3 , obr. RD–3. Pre sily, ktorými vlákna pôsobia na jednotlivé telesá platí

$$F_{v1} = F_{v2} + F_{v3} \text{ a } F_{v2} = F_{v3}.$$

Napišeme pohybové rovnice telies (zrýchlenia uvažujeme kladné, pokiaľ majú zhodný smer so smerom gravitačného zrýchlenia).

$$\text{T1: } m_1 a_1 = m_1 g - F_{v1}$$

$$\text{T2: } m_2 a_2 = m_2 g - F_{v2}$$

$$\text{T3: } m_3 a_3 = m_3 g - F_{v3},$$

pričom zrýchlenie a_1 je stredná hodnota zrýchlení a_2 a a_3 opačného smeru

$$a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2}.$$

Postupne vylúčime ťahové sily vlákien

$$(m_1 + 4m_2)a_2 + m_1 a_3 = 2(2m_2 - m_1)g$$

$$m_2 a_2 - m_3 a_3 = (m_2 - m_3)g$$

$$m_1 a_2 + (m_1 + 4m_3)a_3 = 2(2m_3 - m_1)g$$

a potom vyjadríme zrýchlenia

$$a_1 = -\frac{4m_2 m_3 - m_1 m_3 - m_1 m_2}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3} g, \quad (1)$$

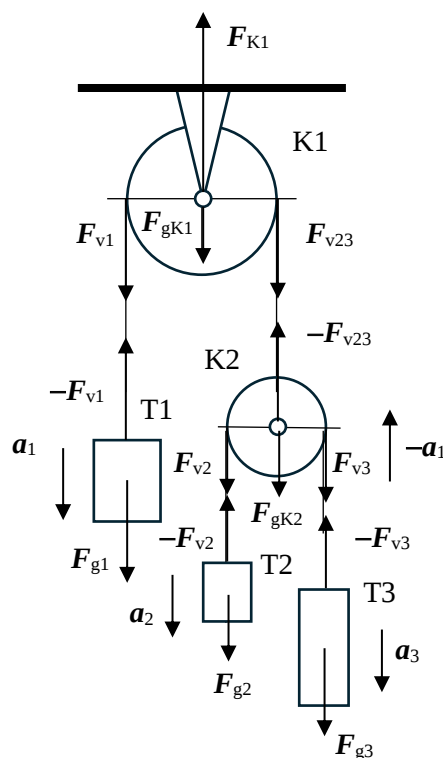
$$a_2 = \frac{4m_2 m_3 + m_1 m_2 - 3m_1 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3} g, \quad (2)$$

$$a_3 = \frac{4m_2 m_3 + m_1 m_3 - 3m_1 m_2}{4m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2} g. \quad (3)$$

c) Aby teleso T1 zostalo v pokoji, musí byť jeho zrýchlenie nulové, tzn. $a_1 = 0$. Zo vzťahu (1) pre $m_1 = m_{10}$ dostaneme podmienku

$$4m_2 m_3 - m_{10} m_3 - m_{10} m_2 = 0,$$

odkiaľ máme



Obr. RD–3

$$m_{10} = \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}. \text{ Pre daní hodnoty } m_{10} = 75 \text{ g.}$$

Po dosadení do (2) a (3) alebo jednoduchou fyzikálnou úvahou dostávame zrýchlenie telies T2 a T3

$$a_2 = -a_3 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} g. \text{ Pre dané hodnoty } a_2 = -a_3 = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

- d) Ak je v pokoji teleso T3, platí $a_3 = 0$. Odtiaľ máme

$$4m_2 m_3 + m_1 m_3 - 3m_1 m_2 = 0,$$

a teda

$$m_{30} = \frac{3m_1 m_2}{4m_2 + m_1}. \text{ Pre dané hodnoty } m_{30} = 43 \text{ g.}$$

Zrýchlenie telies T1 a T2

$$a_1 = -\frac{4m_2 m_{30} - m_1 m_{30} - m_1 m_2}{4m_2 m_{30} + m_1 m_2 + m_1 m_{30}} g = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g,$$

$$a_2 = \frac{4m_2 m_{30} + m_1 m_2 - 3m_1 m_{30}}{4m_2 m_{30} + m_1 m_2 + m_1 m_{30}} g = \frac{2(2m_2 - m_1)}{4m_2 + m_1} g = -2a_1.$$

Pre dané hodnoty $a_1 = -0,70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_2 = 1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

5. Prísavka LK

Riešenie:

- a) Keďže nie je pod prísavkou vzduch, pôsobí na ňu nulová sila, zatiaľ čo na voľný povrch pôsobí atmosférický tlak vzduchu p_a silou $F = p_a S_1$.

Prísavka tak udrží ťahovú silu $F = 100 \text{ N}$.

- b) Ak menšia nádoba pláva vo vode vo veľkej nádobe a ťahová sila nite je nulová tzn. až do jej vyrovňania, pôsobí proti jej tiažovej sile sila vztlaková

$$mg = S_2 h_1 \rho g.$$

Hĺbka ponorenia menšej nádoby vo vode $h_1 = \frac{m}{S_2 \rho}$. Pre dané hodnoty $h_1 = 15 \text{ mm}$.

- c) Pri ďalšom nalievaní vody sa poloha menšej nádoby nemení, keďže ju drží napnutá niť, a narastá hĺbka jej ponorenia $h = H - (\ell + h_0)$ pod hladinou. Ak vo vlákne pôsobí ťahová sila F_1 , pre rovnováhu malej nádoby potom platí

$$mg + F_1 = S_2 (H - \ell) \rho g.$$

Na prísavku pôsobí zhora tlaková sila vody.

$$F_2 = S_1 [p_a + H \rho g].$$

Ak pri výške hladiny H_m sila F_1 dosiahne hodnotu F_2 , prísavka sa uvoľní. Pre tento stav platí

$$H_m = \frac{(m + S_2 \ell \rho)g + S_1 p_a}{(S_2 - S_1) \rho g} = \frac{1}{S_2 - S_1} \left(\frac{m}{\rho} + S_2 \ell + \frac{S_1 p_a}{\rho g} \right).$$

Pre dané hodnoty $H_m = 24 \text{ cm}$.

6. Zrážka v žľabe

Riešenie:

- a) Ak neuvažujeme straty energie trením, kinetická energia v najnižšom bode je rovná zmene potenciálnej energie na výškovom rozdieli R_1

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g R_1, \text{ odkiaľ máme rýchlosť nárazu } v_0 = \sqrt{2 g R_1}.$$

Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy a pri pružnej zrážke aj kinetická energia

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Z týchto rovníc dostávame rýchlosti guľôčok po zrážke

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} v_0, \quad v_2 = \frac{2 m_1}{m_2 + m_1} v_0.$$

Ak má guľôčka G2 prejsť najvyšším bodom žľabu, prítlačná sila F_p , ktorou tlačí žľab na guľôčku musí byť nezáporná. Dostredivá sila v najvyššom bode trajektórie $F_d = F_p + F_g$, odkiaľ $F_p = F_d - F_g \geq 0$, a teda

$$m_2 \frac{v_{2m}^2}{R_2} - m_2 g \geq 0, \text{ a teda } v_{2m}^2 \geq g R_2.$$

Ak je v_2 rýchlosť guľôčky G2 po zrážke, pre rýchlosť v_{2m} vo výške $2R_2$ platí

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 2R_2 m_2 g = \frac{1}{2} m_2 v_{2m}^2,$$

odkiaľ máme

$$v_{2m}^2 = v_2^2 - 4R_2 g \geq R_2 g, \text{ a teda } v_2 \geq \sqrt{5R_2 g}.$$

Po dosadení za v_2 a v_0 dostávame

$$k = \frac{R_1}{R_2} \geq \frac{5}{8} \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)^2 = \frac{5}{8} (p + 1)^2 = k_{\min}$$

- b) Ak máme $k = 2$, tzn. $R_1 = 2 R_2$, uvažujeme dva prípady pomeru p :

Pre 1. prípad $p_1 = 0,5$, tzn. $m_2 = 0,5 m_1$, máme $k_{1 \min} = 1,4$.

Keďže $k > k_{1 \min}$, guľôčka G2 dosiahne vrchol žľabu o2, tzn. $h_{2m} = 2R_2$.

Guľôčka G1 má po odraze rýchlosť

$$v_1 = \frac{1}{3} v_0 = \frac{1}{3} \sqrt{2 R_1 g}.$$

Po zrážke sa pohybuje v pôvodnom smere v žľabe o2 a pre výšku platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h_{1m}, \text{ a teda } h_{1m} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{9} R_1 = \frac{2}{9} R_2.$$

Guľôčka G1 vystúpi v žľabe o2 do výšky $h_{1m} = 2/9 R_2$.

Pre 2. prípad $p_2 = 2$, tzn. $m_2 = 2 m_1$, máme $k_{2 \min} = 5,6$.

Keďže $k < k_{2 \min}$, guľôčka G2 najvyšší bod žľabu o2 nedosiahne.

Guľôčka G1 má po zrážke rýchlosť

$$v_1 = -\frac{1}{3} v_0, \text{ a teda sa pohybuje nazad po oblúku o1.}$$

Vystúpi do výšky h_{1m} , pre ktorú platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h_{1m}, \text{ a teda } h_{1m} = \frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{R_1}{9}.$$

Gulôčka G2 má po zrážke rýchlosť

$$v_2 = \frac{2}{3} v_0$$

a pohybuje sa po oblúku o2.

Gulôčka sa pohybuje v žľabe a dosiahne nulovú rýchlosť iba ak výška najvyššieho bodu $h_{2m} \leq R_2$.

Ak by bola maximálna výška $h_{2m} \geq R_2$, stratila by gulôčka pred dosiahnutím maximálnej výšky kontakt so žľabom a v najvyššom bode by mala nenulovú vodorovnú rýchlosť.

Predpokladajme, že sa gulôčka G2 v žľabe zastaví. Potom platí

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h_{2m}, \text{ a teda } h_{2m} = \frac{4}{9} R_1 = \frac{8}{9} R_2.$$

Keďže $h_{2m} < R_2$, je predpoklad splnený.

7. Meranie ramena valivého odporu – experiment

Riešenie:

Podľa úrovne spracovania

max. 10 b

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy domáceho kola kat. D

Návrh a úprava úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp

Recenzia úloh: Ľubomír Mucha, Aba Teleki

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024