

66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
domáce kolo kategória C
riešenie úloh

1. Fontána

Riešenie:

- a) Voda sa pohybuje v homogénnom tiažovom poli s tiažovým zrýchlením g . Ide o šikmý vrh s časovou závislosťou súradníc

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (1)$$

$$a) \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (2)$$

kde v_0 je rýchlosť častíc vody v ústí dýzy. Po vylúčení času z (1) rovnice upravíme na tvar

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha, \quad (3)$$

čo je rovnica paraboly.

2 b

- b) Aby voda dopadla do otvoru plochy fontány, musí platiť $x = D$ pre $y = 0$. Dosadením do rovnice (3) dostaneme potrebnú rýchlosť vody v dýze

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{\sin 2\alpha} D}.$$

Objemový prietok dýzou je

$$Q_V = S v_0 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{g}{\sin 2\alpha} D} \approx 2,33 \text{ L/s} \quad (4)$$

1 b

Tlak v potrubí určíme pomocou Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + p_a,$$

odkiaľ dostávame

$$p = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v_2^2) + p_a. \quad (5)$$

Rýchlosť vody v potrubí určíme z rovnice kontinuity

$$v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_0.$$

Po dosadení do rovnice (5)

$$p = \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) v_0^2 + p_a = p_a + \frac{g \rho}{2 \sin 2\alpha} \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) D \approx 110,6 \text{ kPa}. \quad (6)$$

1 b

Čerpadlo zvyšuje tlak z hodnoty p_a na hodnotu p pri prietoku Q_V .

$$P = (p - p_a) S_2 v_2 = (p - p_a) Q_V = \frac{\pi d_1^2 \rho}{8} \left(\frac{g D}{\sin 2\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) \approx 24,7 \text{ W}. \quad (7)$$

1 b

- c) Objem vody nad plochou fontány je objem, ktorý opustí dýzu za čas letu vody

$$V = Q_v t_d .$$

Čas letu dostaneme z rovnice (2) pre $y = 0$

$$t_d = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha = \sqrt{\frac{2D}{g} \tan \alpha} .$$

Objem vody je

$$V = \frac{\pi d_1^2 D}{4 \cos \alpha} \approx 1,6 \text{ litra.} \quad 2 \text{ b}$$

- d) Maximálnu výšku h_m dostaneme z rovnice (2) pre čas $\frac{1}{2} t_d$

$$h_m = \frac{D}{4} \tan \alpha \approx 57,5 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

Obsah prierezu prúdu vody v najvyššom bode určíme z rovnice kontinuity

$$S_1 v_0 = S_m v_m, \text{ odkiaľ } S_m = S_1 \frac{v_0}{v_m} = \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{v_0}{v_0 \cos \alpha} = \frac{\pi d_1^2}{4 \cos \alpha} \approx 6,94 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ b}$$

2. Gulôčka v žľabe

Riešenie:

- a) Ak neuvažujeme trenie, zachováva sa mechanická energia gulôčky. Kinetická energia na dolnom konci žľabu je rovná rozdielu potenciálnej energie medzi začiatkom a koncom žľabu

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 = m g \ell \sin \alpha ,$$

kde $J = \frac{2}{5} m r^2$ je moment zotrvačnosti gulôčky vzhľadom na jej os. Pri valivom pohybe bez

prešmykovania platí $v = \omega r$.

Rýchlosť gulôčky na dolnom konci žľabu je

$$v_0 = \sqrt{\frac{10}{7} g \ell \sin \alpha} . \text{ Pre dané hodnoty } v_0 = 3,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

- b) Od dolného konca žľabu sa gulôčka pohybuje šikmým vrhom nadol so začiatočnou rýchlosťou v_0 a začiatočným uhlom α smerom nadol. Ak označíme začiatok súradníc v dolnom bode žľabu (x vodorovná, y zvislá nadol), pre súradnice gulôčky platí

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Pre vzdialenosť d v hĺbke pádu h dostávame kvadratickú rovnicu

$$d^2 + 2 \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} d - \frac{2 h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

ktorá má riešenie

$$d = - \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2 v_0^2 h \cos^2 \alpha}{g}} .$$

Riešeniu zodpovedá znamienko (+) pre $d > 0$. Po úprave

$$d = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)$$

a po dosadení za v_0

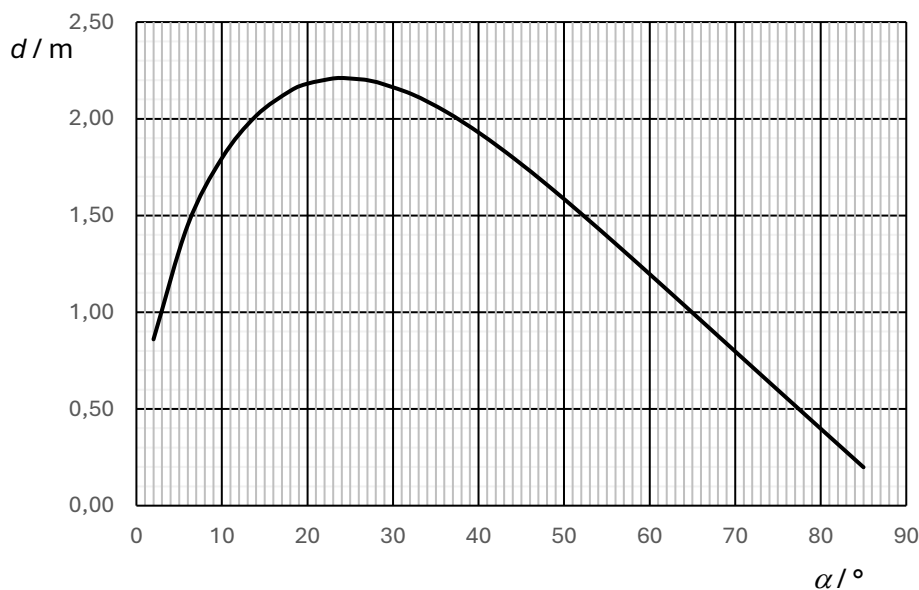
$$d = \frac{10}{7} \ell \sin^2 \alpha \cos \alpha \left(\sqrt{1 + \frac{7h}{5\ell \sin^3 \alpha}} - 1 \right)$$

Pre dané hodnoty $d = 2,18$ m.

3 b

c) Graf funkcie $d(\alpha)$.

3 b



Závislosť vzdialenosť d od uhlu α vykazuje maximum $d_m = 2,21$ m pre $\alpha_m = 24^\circ$.

2 b

3. Modrý Mesiac

Riešenie:

a) Určíme polomer r trajektórie Mesiaca

$$M_M r = M_Z (d - r), \text{ odkiaľ máme } r = \frac{M_Z}{M_M + M_Z} d = 379\,730 \text{ km.}$$

2 b

Pri pohybe po kružnici je dostredivá sila rovná sile gravitačnej

$$G \frac{M_Z M_M}{d^2} = M_M \omega_M^2 r,$$

odkiaľ máme siderickú dobu obehu Mesiaca okolo Zeme

$$T_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{\omega_M} = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G(M_M + M_Z)}} = 27,28 \text{ d.}$$

2 b

b) Za čas T_{syn} , kým sa na oblohe zopakuje spln, Zem prejde určitý oblúk trajektórie a tým sa spojnice Zem–Slnko natočí o uhol φ

$$\frac{2\pi}{T_Z} T_{\text{syn}} = \varphi.$$

Aby sa dostal Mesiac do rovnakej polohy voči Zemi (v sústave Zem–Slnko), musí vykonať stredový uhol voči Zemi $2\pi + \varphi$. Na to potrebuje čas

$$T_{\text{syn}} = (2\pi + \varphi) \frac{T_{\text{sid}}}{2\pi}.$$

Po dosadení za φ po úprave dostaneme

$$T_{\text{syn}} = \frac{T_Z}{T_Z - T_{\text{sid}}} T_{\text{sid}} = 29,48 \text{ d.} \quad 3 \text{ b}$$

Táto doba sa nazýva „lunárny mesiac“.

- c) Keďže je lunárny mesiac kratší, môžu byť dva splny v jednom kalendárnom mesiaci. Týmto mesiacom nemôže byť február, lebo je kratší ako lunárny mesiac. Ak uvážime priemernú dĺžku mesiaca $T_m = T_Z/12 = 30,44 \text{ d}$, každý mesiac sa spln posunie v priemere o $\Delta T = T_{\text{syn}} - T_m = -0,96 \text{ dňa}$, čo za rok predstavuje posunutie o $-11,52 \text{ d}$. Situácia s „Modrým Mesiacom“ sa tak zopakuje približne za dobu $t_M = 2,6 \text{ roka}$. 3 b

Pozn.: Keďže výpočty sú iba približné, líši sa vypočítaný lunárny mesiac od skutočnej hodnoty $T_{\text{syn}} = 29,53 \text{ d}$. To sa prejaví odchýlkou doby t_M . Tá je v skutočnosti 2,7 roka.

Pre zaujímavosť Modrý Mesiac bol 31.7.2015, 31.3.2018, 31.10.2020 a 31.8.2023. Ďalší Modrý Mesiac nastane až 31.5.2026, nakoľko sa prejaví krátky mesiac Február.

4. Kocka ľadu vo vode LK

Riešenie:

- a) Kocka má najväčšiu hmotnosť, ak je vnútri hliníková guľa s najväčšou hustotou. Ak má aj táto kocka plávať, musí byť najväčšia vztlaková sila (pri takmer úplnom ponorení kocky) väčšia ako sila tiažová

$$F_v = a^3 \rho_v g > F_{gAl} = [a^3(1-p)\rho_L + a^3 p \rho_{Al}]g,$$

odkiaľ dostávame podmienku

$$p < \frac{\rho_v - \rho_L}{\rho_{Al} - \rho_L} = p_{\min}. \text{ Pre dané hodnoty } p_{\min} = 4,66 \cdot 10^{-2} = 4,66 \%. \quad 2 \text{ b}$$

- b) Objem pod hladinou je rovný súčtu pôvodného objemu vody $V_0 = S h_0$ a objemu V_k časti kocky ponorenej pod hladinou. Výška hladiny je potom

$$S h_1 = S h_0 + V_k, \text{ resp. } h_1 = h_0 + \frac{V_k}{S}.$$

- i) Podľa Archimedovho zákona pre kocku so vzduchovou bublinou platí

$$V_{ki} \rho_v = a^3(1-p_1)\rho_L.$$

Potom máme

$$h_{li} = h_0 + (1-p_1) \frac{4a^3}{\pi d^2} \frac{\rho_L}{\rho_v}, \text{ pre dané hodnoty } h_{li} = 13,2 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

- ii) Ak je časť p_1 kocky z tekutej vody, máme

$$V_{kii} \rho_v = (1-p_1)a^3 \rho_L + p_1 a^3 \rho_v,$$

a teda

$$h_{1ii} = h_0 + \frac{4a^3}{\pi d^2 \rho_v} [(1-p_1)\rho_L + p_1 \rho_v], \text{ pre dané hodnoty } h_{1ii} = 13,5 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

iii) Podobne so zamrznutým drevom

$$h_{1iii} = h_0 + \frac{4a^3}{\pi d^2 \rho_v} [(1-p_1)\rho_L + p_1 \rho_d], \text{ pre dané hodnoty } h_{1iii} = 13,4 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

iv) Keďže $p_1 > p_{\min}$, kocka s hliníkom klesne ku dnu. Potom platí

$$h_{1iv} S = h_0 S + a^3,$$

a teda

$$h_{1iv} = h_0 + \frac{4a^3}{\pi d^2}, \text{ pre dané hodnoty } h_{1iv} = 13,6 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

c) Keď sa ľad rozpustí, premení sa na vodu, a teda táto voda vo valci pribudne.

i) V prvom prípade, pre kocku so vzduchovou bublinou, platí

$$S h_{2i} \rho_v = S h_0 \rho_v + (1-p) a^3 \rho_L,$$

odkiaľ máme

$$h_{2i} = h_0 + (1-p) \frac{4a^3}{\pi d^2} \frac{\rho_L}{\rho_v}, \text{ pre dané hodnoty } h_{2i} = 13,2 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

ii) V tomto prípade platí

$$S h_{2ii} \rho_v = S h_0 \rho_v + (1-p) a^3 \rho_L + p a^3 \rho_v,$$

odkiaľ máme

$$h_{2ii} = h_0 + \left[(1-p) \frac{\rho_L}{\rho_v} + p \right] \frac{4a^3}{\pi d^2}, \text{ pre dané hodnoty } h_{2ii} = 13,5 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

iii) Po rozpustení ľadu zostane na hladine plávať drevená guľa. Objem pod úrovňou hladiny je súčtom objemu pôvodnej vody, vody vzniknutej z ľadu a objemu ponorenej časti dreva.

$$S h_{2iii} = S h_0 + \frac{(1-p) a^3 \rho_L}{\rho_v} + \frac{p a^3 \rho_d}{\rho_v},$$

resp.

$$h_{2iii} = h_0 + \left[(1-p) \rho_L + p \rho_d \right] \frac{4a^3}{\pi d^2 \rho_v}, \text{ pre dané hodnoty } h_{2iii} = 13,4 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

iv) Objem pod hladinou je súčtom pôvodného objemu vody, objemu hliníkovej gule a objemu vody, ktorá vznikne rozpustením ľadu

$$S h_{2iv} = S h_0 + p a^3 + \frac{(1-p) a^3 \rho_L}{\rho_v},$$

odkiaľ máme

$$h_{2iv} = h_0 + \left[p + \frac{(1-p) \rho_L}{\rho_v} \right] \frac{4a^3}{\pi d^2}, \text{ pre dané hodnoty } h_{2iv} = 13,5 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

5. Chladenie čaju

Riešenie:

- a) Plechový hrnček má rovnakú teplotu ako čaj. Teplo sa z povrchu hrnčeka odvádza prestupom, pričom tepelný výkon je priamoúmerný rozdielu teplôt medzi hrnčekom a okolím

$$\frac{dQ}{dt} = k(T - T_o),$$

kde k je koeficient prestupu tepla, T teplota, Q teplo a t čas.

Ak nie je zmena teploty veľká, možno nahradiť teplotu hrnčeka strednou hodnotou T_{st} .

$$\frac{Q_1}{\Delta t_1} = k_1(T_{s1} - T_{o1}), \text{ kde } T_{s1} = \frac{T_v + T_1}{2} \text{ a } T_{o1} = 20^\circ\text{C}.$$

Ochladením sa z čaju odvedie teplo

$$Q_1 = mc(T_v - T_1).$$

Dosadením do predchádzajúceho vzťahu určíme koeficient prestupu tepla

$$k_1 = \frac{\rho V c (T_v - T_1)}{\left(\frac{T_v + T_1}{2} - T_{o1}\right) \Delta t_1}, \text{ pre dané hodnoty } k_1 = 0,18 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

Po vložení hrnčeka do chladničky dostávame rovnakým spôsobom pre $T_{o2} = 0^\circ\text{C}$

$$k_2 = \frac{\rho V c (T_1 - T_2)}{\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{o2}\right) \Delta t_2}, \text{ pre dané hodnoty } k_2 = 0,18 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

Vidíme, že koeficient prestupu tepla sa s poklesom teploty nemení, $k_1 = k_2 = k$. 1 b

- b) Po vložení na okno do mrazu s teplotou $T_{o3} = -20^\circ\text{C}$ dostávame rovnakým spôsobom čas

$$\Delta t_3 = \frac{\rho V c (T_2 - T_3)}{\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_{o3}\right) k} = \frac{(T_2 - T_3) \left(\frac{T_v + T_1}{2} - T_{o1}\right)}{(T_v - T_1) \left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_{o3}\right)} \Delta t_1,$$

pre dané hodnoty $\Delta t_3 = 3 \text{ min } 36 \text{ s}$. 2 b

- c) Ak sa voda zohreje na teplotu varu, jej teplota sa ďalej nemení a voda sa varom vyparuje.

Varič dodáva výkon $P = \eta P_p$, kde P_p je príkon variča. Teplo sa z hrnčeka s vodou odvádza jednak prestupom, jednak zmenou skupenstva

$$P = k(T_v - T_{o1}) + \frac{\Delta m \ell_v}{\Delta t_4}, \text{ kde } \Delta m = \rho p V \text{ a } p = 10 \%.$$

Z porovnania výkonov dostávame

$$\Delta t_4 = \frac{\rho p V \ell_v}{\eta P_p - k(T_v - T_{o1})} = \frac{p \ell_v}{\frac{\eta P_p}{\rho V} - \frac{2c}{\Delta t_1} \frac{(T_v - T_1)(T_v - T_{o1})}{T_v + T_1 - 2T_{o1}}}.$$

Pre dané hodnoty $\Delta t_4 = 428 \text{ s} = 7 \text{ min } 8 \text{ s}$. 3 b

6. Reťazec rezistorov

Riešenie:

- a) Z pohľadu vstupu reťazca AC je reťazec zložený zo série článkov R – R . Keďže je reťazec veľmi dlhý, pridaním ďalšieho článku sa vstupný odpor R_{AC} nezmení.

$$R_{AC} = R + \frac{R R_{AC}}{R + R_{AC}}.$$

Odtiaľ dostávame kvadratickú rovnicu

$$R_{AC}^2 - R R_{AC} - R^2 = 0$$

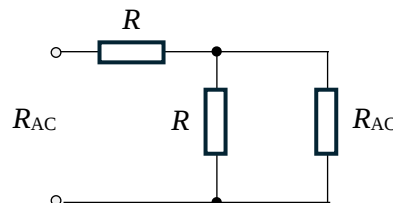
a jej riešenie

$$R_{AC} = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} \rightarrow \frac{R}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

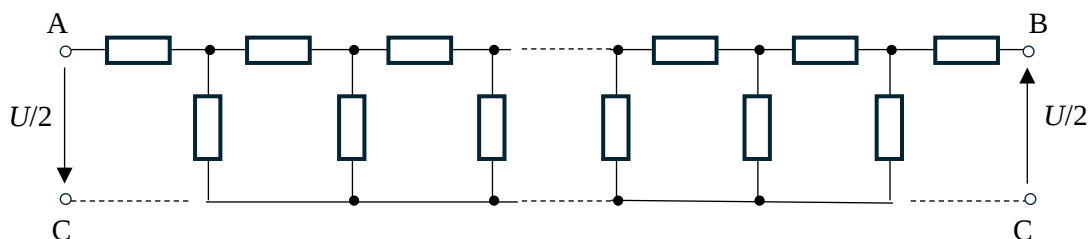
Prúd zdroja

$$I_1 = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{2U}{(1 + \sqrt{5})R}. \text{ Pre dané hodnoty } I_1 = 7,4 \text{ A.}$$

5 b



- b) Pre riešenie úlohy je vhodné si obvod prekresliť tak, aby v ňom bolo vidno užitočné súvislosti. Využijeme skutočnosť, že obvod je symetrický, tzn. správa sa rovnako sprava i zľava.



Napätie U zdroja sa rozdelí na polovice $U_{AC} = U_{CB} = U/2$. Odpor R_{AC} sme stanovili v časti a). Prúd zdroja pripojeného k uzlom A a B

$$I_2 = \frac{U}{2R_{AC}} = \frac{U}{(1 + \sqrt{5})R}. \text{ Pre dané hodnoty } I_2 = 3,7 \text{ A.}$$

5 b

7. Nabíjanie a vybíjanie kapacitora – experimentálna úloha

Riešenie:

Exponenciálny vzťah (1) upravíme na tvar

$$\ln \left(\frac{U_z}{U_z - U_C} \right) = \frac{1}{\tau} t$$

a zavedieme premenné grafu $y = \ln \left(\frac{U_z}{U_z - U_C} \right)$ a $x = t$. Dostávame tak lineárny vzťah

$$y = k_1 x, \text{ kde } k = 1/\tau.$$

Regresná priamka prechádza začiatkom súradníc a má smernicu $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Podobne vzťah (2) upravíme na tvar

$$\ln \frac{U_{C0}}{U_C} = \frac{1}{\tau} t, \text{ a teda v druhom grafe vynášame premenné } y = \ln \frac{U_{C0}}{U_C} \text{ a } x = t.$$

Potom máme lineárny vzťah $y = k_2 x$. Určte smernicu regresnej priamky.

Pri hodnotení posúdiť:

správne vykonanie merania 4 b

správny záznam nameraných veličín do tabuľky 1 b

(označenie veličín a jednotiek)

správne linearizované grafy 2 b

(vhodné premenné x a y , označenie osí, veličiny a jednotky, stupnice)

určenie smernice grafu a potom τ a C 1 b

správne grafy $U_C(t)$ 2 b

vzor grafu pre $\tau = 10$ s a $U_Z = U_{C0} = 6,0$ V (plné čiary) a namerané body pre čítanie času pri hodnotách napätia postupne po 0,5 V (značky nameraných bodov)

