

66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
domáce kolo kategória B
riešenie úloh

1. Diera v sude

Riešenie:

- a) Prúdenie opisuje Bernoulliho rovnica medzi hladinou a otvorom. Na začiatku je tlak na hladine rovný atmosférickému tlaku p_0 , výška hladiny nad otvorom je h_0 a pri vytekaní nafty hladina klesá rýchlosťou v_h . Rýchlosť vytekajúcej nafty v otvore je v_0 a tlak v otvorenom otvore je p_0 . Ak považujeme kvapalinu za ideálnu, platí

$$\frac{1}{2} \rho v_h^2 + \rho g h_0 + p_0 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + p_0.$$

Keďže $d \ll D$, je $\frac{v_h}{v_0} = \frac{S_0}{S_s} = \frac{d^2}{D^2} \ll 1$, a teda kinetický člen na ľavej strane možno zanedbať. Potom

dostávame začiatočnú rýchlosť vytekania nafty z otvoru

$$v_0 = \sqrt{2 g h_0}.$$

Objemový prietok je potom

$$Q_{v0} = S_0 v_0 = \frac{\pi d^2}{4} v_0 = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 g h_0}.$$

Pre dané hodnoty $Q_{v1} = 0,96$ litra/s = 57,5 litra/min.

3 b

- b) Po vypustení objemu V_n nafty klesne hladina v sude, a tým aj tlak vzduchu nad hladinou.

Začiatočný objem vzduchu nad hladinou nafty

$$V_0 = S_s (H - h_0) = \frac{\pi D^2}{4} (H - h_0).$$

Zmenu tlaku vzduchu pri vytekaní nafty opisuje stavová rovnica izotermického deja

$$p_0 V_0 = p (V_0 + V_n), \text{ tzn. } p = p_0 \frac{V_0}{V_0 + V_n} = p_0 \frac{H - h_0}{H - h}.$$

Bernoulliho rovnica má potom tvar (pre $v_h \ll v$)

$$\rho g h + p = \frac{1}{2} \rho v^2 + p_0, \text{ odkiaľ máme } v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho g h + p - p_0)}$$

Tok sa zastaví, ak rýchlosť $v = 0$, a teda

$$\rho g h_c = p_0 - p, \text{ a po dosadení } \rho g h_c = p_0 - p_0 \frac{H - h_0}{H - h_c} = p_0 \frac{h_0 - h_c}{H - h_c}.$$

Pre výslednú výšku nafty dostávame kvadratickú rovnicu

$$\rho g h_c^2 - (p_0 + \rho g H) h_c + p_0 h_0 = 0,$$

ktorá má riešenie

$$h_c = \frac{p_0 + H \rho g \pm \sqrt{(p_0 + H \rho g)^2 - 4 \rho g p_0 h_0}}{2 \rho g} = \frac{p_0 + H \rho g}{2 \rho g} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \rho g p_0 h_0}{(p_0 + H \rho g)^2}} \right].$$

Keďže pre $h_0 \rightarrow 0$ musí byť i $h_c \rightarrow 0$, platí iba znamienko (-).

Pre dané hodnoty $h_c = 143,6$ cm.

Výsledný objem nafty vytečenej zo suda

$$V_{nc} = \frac{\pi D^2}{4} (h_0 - h_c) = \frac{\pi D^2}{4} \left\{ h_0 - \frac{p_0 + H \rho g}{2 \rho g} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \rho g p_0 h_0}{(p_0 + H \rho g)^2}} \right] \right\}. \quad 3 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $V_{nc} = 31,9$ litra.

Tento objem predstavuje časť pôvodného objemu nafty

$$\eta = \frac{V_{nc}}{V_{n0}} = \frac{h_0 - h_c}{h_0} = 1 - \frac{h_c}{h_0} = 1 - \frac{p_0 + H \rho g}{2 h_0 \rho g} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \rho g p_0 h_0}{(p_0 + H \rho g)^2}} \right], \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty $\eta = 4,2$ %.

c) Objemový prietok

$$Q_v = S v = S \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho g h + p - p_0)} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \left(\rho g h + p_0 \frac{h - h_0}{H - h} \right)}.$$

Vzťah upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$h^2 - \left[H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_v}{S} \right)^2 \right] h + \frac{p_0}{\rho g} h_0 + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_v}{S} \right)^2 H = 0,$$

ktorá má riešenie

$$h = \frac{1}{2} \left[H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_v}{S} \right)^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_v}{S} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{p_0}{\rho g} h_0 + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_v}{S} \right)^2 H \right]}$$

Pre $Q_v = 0$ dostávame $h = h_c$, preto fyzikálny význam má iba znamienko (-). Po úprave dostávame

$$h = \frac{1}{2} \left(H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g d^4} \right) \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\frac{p_0}{\rho g} h_0 + \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g d^4} H}{\left(H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g d^4} \right)^2}} \right].$$

Pre prietok $Q_{v1} = 30 \text{ L/min} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ dostávame $h_1 = 145,5$ cm.

3 b

2. Mesiac

Riešenie:

- a) Pre zobrazenie na čipe platí

$$\frac{d_1}{f} = \frac{d_M}{r_{ZM}}.$$

Priemer d_1 obrazu na čipe určíme z priemeru d na fotografii pomocou zväčšenia, ktoré je dané pomerom strán strany a fotografie a zodpovedajúcej strany a_1 na čipe

$$z = \frac{a}{a_1} = \frac{d}{d_1}$$

Pre vzdialenosť Mesiaca od Zeme platí

$$\frac{D_M}{r_{ZM}} = \frac{d_1}{f},$$

a teda

$$r_{ZM} = D_M \frac{f}{d_1} = D_M \frac{f}{d} \frac{a}{a_1}, \text{ pre dané hodnoty } r_{ZM} = 3,84 \times 10^5 \text{ km.} \quad 3 \text{ b}$$

- b) Vzdialenosť Mesiaca od hmotného stredu sústavy Z–M

$$r_M = r_{ZM} \frac{M_Z}{M_Z + M_M} = r_{ZM} \frac{1}{1 + p}. \text{ Pre dané hodnoty } r_M = 3,80 \times 10^5 \text{ km.} \quad 2 \text{ b}$$

- c) Siderický mesiac je doba T_M , za ktorú sa Mesiac vráti pri obehu Zeme do pôvodného miesta vzhľadom na hviezdy. Pre pohyb po kružnici pod účinkom gravitačnej sily medzi Zemou a Mesiacom platí

$$G \frac{M_Z M_M}{r_{ZM}^2} = M_M \omega_M^2 r_M, \text{ kde } \omega_M = \frac{2\pi}{T_M} \text{ a } g = G \frac{M_Z}{R_Z^2}.$$

Odtiaľ máme

$$T_M = \frac{2\pi r_{MZ}}{R_Z} \sqrt{\frac{r_M}{g}}, \text{ pre dané hodnoty } T_M = 2,355 \times 10^6 \text{ s} = 27,26 \text{ d} = 27 \text{ d } 6 \text{ h } 16 \text{ min.} \quad 2 \text{ b}$$

- d) Synodický mesiac je doba, za ktorú sa vyskytne v rovnakej fáze (napr. spln) pre pozorovateľa na Zemi. Za dobu T_M^* sa Zem natočí voči Slnku o uhol

$$\varphi = \frac{2\pi}{T_Z} T_M^*, \text{ kde } T_Z \text{ je jeden rok, doba, za ktorú Zem prekoná uhol } 2\pi \text{ rad.}$$

Aby sa Mesiac dostal do rovnakej polohy voči spojnici Slnko–Zem, musí okolo Zeme prekonať uhol $2\pi + \varphi$. Na to potrebuje čas

$$T_M^* = \frac{2\pi + \varphi}{\omega_M} = \frac{2\pi + \frac{2\pi}{T_Z} T_M^*}{2\pi} T_M = \left(1 + \frac{T_M^*}{T_Z}\right) T_M,$$

odkiaľ dostávame

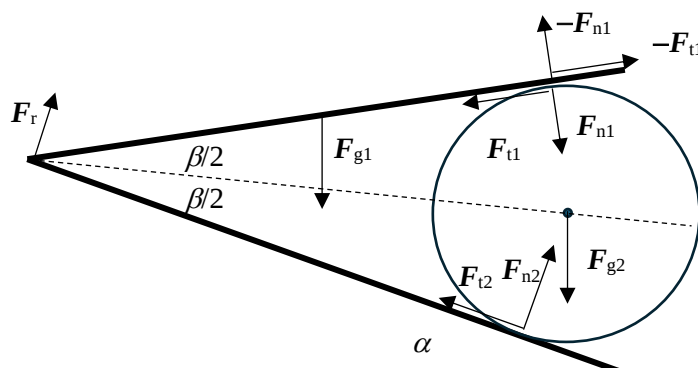
$$T_M^* = \frac{T_Z}{T_Z - T_M} T_M. \text{ Po dosadení } T_M^* = 29,46 \text{ d} = 29 \text{ d } 11 \text{ h } 2 \text{ min.} \quad 3 \text{ b}$$

3. Statická rovnováha

Riešenie:

a) Obr. RB-1 s označením síl

1 b



Obr. RB-1

b) V stave statickej rovnováhy je výslednica síl a výslednica momentov síl pôsobiacich na valec nulová. Sily rozložíme na zvislú a vodorovnú zložku. Uhol sklonu tyče je $\beta - \alpha$.

$$F_{n1} \cos(\beta - \alpha) + F_{t1} \sin(\beta - \alpha) - F_{n2} \cos \alpha - F_{t2} \sin \alpha + F_{g2} = 0 \quad (1)$$

$$F_{n1} \sin(\beta - \alpha) - F_{t1} \cos(\beta - \alpha) + F_{n2} \sin \alpha - F_{t2} \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Moment sily vzhľadom na os valca

$$F_{t1} R - F_{t2} R = 0, \text{ odkiaľ máme } F_{t1} = F_{t2} = F_t. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Taktiež tyč je v rovnováhe. Keďže nepoznáme reakčnú silu F_r , určíme iba momentovú rovnováhu vzhľadom na kĺb

$$F_{g1} \frac{\ell}{2} \cos(\beta - \alpha) - F_{n1} \frac{R}{\tan \beta / 2} = 0. \quad (4)$$

Z rovnice (4) vyjadríme normálovú silu

$$F_{n1} = F_{g1} \frac{\ell}{2R} \cos(\beta - \alpha) \tan \beta / 2. \quad (5) \quad 1 \text{ b}$$

Zostáva vyjadriť F_{n2} . Rovnice (1) a (2) upravíme s použitím (3) a (5).

$$F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \cos^2(\beta - \alpha) + F_{t1} [\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha] + F_{g2} = F_{n2} \cos \alpha \quad (6)$$

$$F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \cos(\beta - \alpha) \sin(\beta - \alpha) - F_{t1} [\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha] = -F_{n2} \sin \alpha.$$

Silu F_{n2} vylúčime pomerom rovníc

$$\frac{F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \cos(\beta - \alpha) \sin(\beta - \alpha) - F_{t1} [\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha]}{F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \cos^2(\beta - \alpha) + F_{t1} [\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha] + F_{g2}} = -\tan \alpha$$

odkiaľ vyjadríme v tvare

$$F_t = \frac{F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} [\tan \alpha \cos^2(\beta - \alpha) + \cos(\beta - \alpha) \sin(\beta - \alpha)] + F_{g2} \tan \alpha}{\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha - \tan \alpha [\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha]} . \quad 1 \text{ b}$$

prípadne v tvare

$$F_t = F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \cos(\beta - \alpha) \frac{\frac{\sin(\beta - \alpha) + \tan \alpha \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha}}{\frac{\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha} - \tan \alpha} +$$

$$+ F_{g2} \frac{\frac{\tan \alpha}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha}}{\frac{\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha} - \tan \alpha}$$

Normálovú silu F_{n2} určíme z rovnice (6) po dosadení za F_{t1}

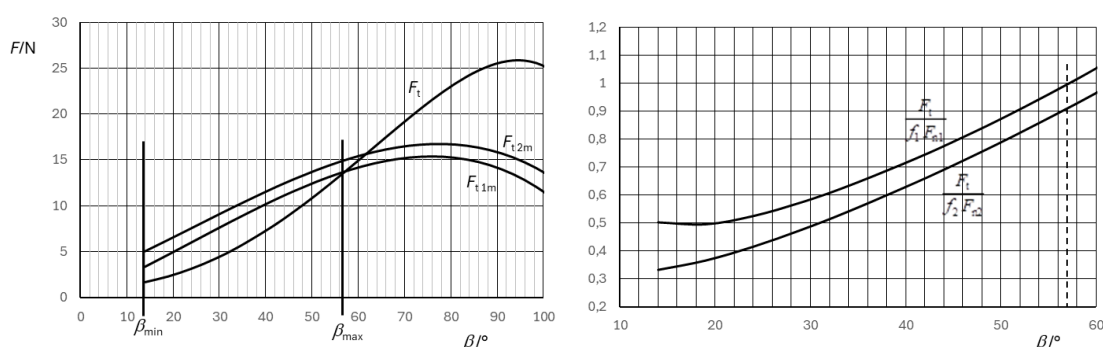
$$F_{n2} = F_{g1} \frac{\ell}{2R} \tan \frac{\beta}{2} \frac{\cos^2(\beta - \alpha)}{\cos \alpha} \left\{ 1 + \frac{\tan \alpha + \tan(\beta - \alpha)}{\frac{\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha} - \tan \alpha} \right\} +$$

$$+ \frac{F_{g2}}{\cos \alpha} \left\{ 1 + \frac{\tan \alpha}{\frac{\cos(\beta - \alpha) + \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha} - \tan \alpha} \right\} . \quad 1 \text{ b}$$

c) Valec zostane v stave statickej rovnováhy, ak sú splnené podmienky statického trenia

$$F_t \leq f_1 F_{n1} \quad \text{a} \quad F_t \leq f_2 F_{n2}, \text{ resp. } \frac{F_t}{f_1 F_{n1}} \leq 1 \quad \text{a} \quad \frac{F_t}{f_2 F_{n2}} \leq 1 .$$

Pre dané hodnoty graficky znázorníme buď veličiny F_t , $f_1 F_{n1}$ a $f_2 F_{n2}$ alebo $\frac{F_t}{F_{n1}}$ a $\frac{F_t}{F_{n2}}$.



Jeden z grafov s vyznačením intervalu statickej rovnováhy 2 b

Najmenší uhol β zodpovedá polohe valca na konci tyče

$$\frac{R}{\ell} = \tan \frac{\beta}{2}, \text{ resp. } \beta_{\min} = 2 \arctan \frac{R}{\ell}, \text{ pre dané hodnoty } \beta_{\min} = 14^\circ .$$

čím je určený najmenší uhol $\beta_{\min}$ v grafe.

Z jedného alebo druhého grafu vidíme, že podmienky statickej rovnováhy sú splnené do uhlu $\beta_{\max} = 57^\circ$, teda interval statickej rovnováhy je

$$\beta \in (14^\circ, 57^\circ). \quad 1 \text{ b}$$

- d) Uhol $\beta_1 = 10^\circ$ nemôže byť pre žiadnu polohu valca.

Pre uhly β_2 a β_3 je valec v statickej rovnováhe.

Pre uhol β_4 sa valec prešmykne v bode dotyku s tyčou, a teda statická rovnováha nenastane.

2 b

4. Kyvadlo s prekážkou

Riešenie:

- a) Pri pohybe guľôčky sa zachováva mechanická energia

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = E_{p0}, \text{ resp. } \frac{1}{2} m (\ell \omega)^2 + m g \ell (1 - \cos \varphi) = E_{p0} \quad (1)$$

Po derivovaní dostávame rovnicu

$$m \ell^2 \omega \dot{\omega} + m g \ell \sin \varphi \dot{\varphi} = 0, \text{ kde } \dot{\varphi} = \omega \text{ a } \dot{\omega} = \varepsilon.$$

Ak je výchylka malá $\varphi < 5^\circ$, platí približná náhrada $\sin \varphi \approx \varphi$. Rovnica pohybu dostane tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0,$$

Ktorá má riešenie $\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$, kde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Odtiaľ dostávame

$$\ell = \frac{g T_0^2}{4\pi^2}. \text{ Pre dané hodnoty } \ell = 24,8 \text{ cm.} \quad 2 \text{ b}$$

- b) Podľa ZZME (1) platí pre krajné polohy guľôčky

$$m g \ell (1 - \cos \varphi_1) = m g (\ell - d) (1 - \cos \varphi_2),$$

Odkiaľ máme

$$\cos \varphi_1 = 1 - \left(1 - \frac{d}{\ell}\right) (1 - \cos \varphi_2) = 1 - \left(1 - \frac{4\pi^2 d}{g T_0^2}\right) (1 - \cos \varphi_2),$$

$$\text{resp. } \varphi_1 = \arccos \left[1 - \left(1 - \frac{4\pi^2 d}{g T_0^2}\right) (1 - \cos \varphi_2) \right]. \quad (2)$$

Pre dané hodnoty $\varphi_1 \leq 3,1^\circ$.

2 b

Ak je splnená táto podmienka, perióda T_1 sa skladá z polperiódy na niti s dĺžkou ℓ a polperiódy na niti s dĺžkou $\ell - d$

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 + \frac{1}{2} T'_0 = \frac{1}{2} T_0 \left(1 + \frac{T'_0}{T_0}\right) = \frac{1}{2} T_0 \left(1 + \sqrt{\frac{\ell - d}{\ell}}\right) = \frac{1}{2} T_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 d}{g T_0^2}}\right).$$

Pre dané hodnoty $T_1 = 0,815 \text{ s}$.

2 b

- c) Periodický pohyb nastane, ak sa guľôčka vracia nazad po rovnakej trajektórii. To je možné iba vtedy, keď výchylka za prekážkou B je maximálne $\varphi_{2m} = 90^\circ$. S použitím vzťahu (2) dostaneme

$$\varphi_3 = \arccos \left[1 - \left(1 - \frac{d}{\ell} \right) (1 - \cos \varphi_{2m}) \right] = \arccos \left[1 - \left(1 - \frac{4\pi^2 d}{g T_0^2} \right) (1 - \cos \varphi_{2m}) \right].$$

Pre dané hodnoty $\varphi_3 \leq 52,9^\circ$.

2 b

- d) Pri pohybe po kružnici je v hornej polohe je dostredivá sila rovná súčtu sily tiažovej a sily ťahu vlákna $mg + F_v$, pričom ťahová sila $F_v \geq 0$, a zrýchlenie má iba dostredivú zložku. V krajnom prípade je v najvyššej polohe $F_v = 0$ a platí

$$F_n = m \frac{v^2}{\ell - d} = mg.$$

Mechanická energia vzhľadom na najnižšiu polohu je potom

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 + 2 m g (\ell - d) = \frac{5}{2} m g (\ell - d).$$

Tá je rovná potenciálnej energii v začiatočnej polohe A

$$E_1 = \frac{5}{2} m g (\ell - d) = m g \ell (1 - \cos \varphi_{4m}).$$

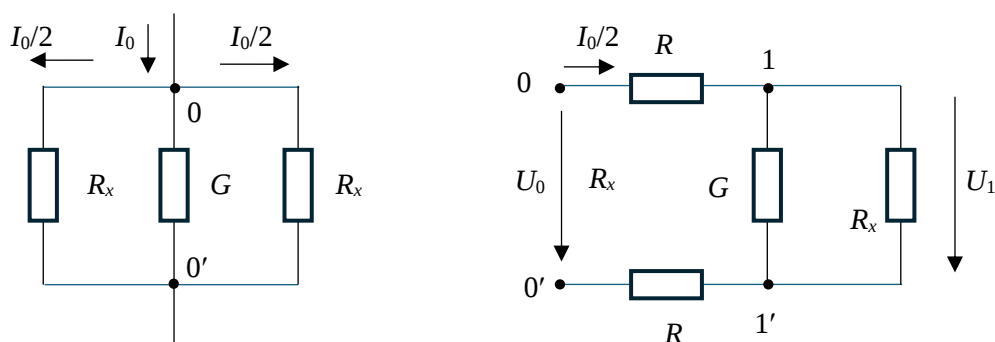
$$\text{Odtiaľ máme } \varphi_4 = \arccos \left[1 - \frac{5}{2} \left(1 - \frac{d}{\ell} \right) \right] = \arccos \left[1 - \frac{5}{2} \left(1 - \frac{4\pi^2 d}{g T_0^2} \right) \right].$$

Pre dané hodnoty $\varphi_4 \geq \varphi_{4m} = 89,5^\circ$.

2 b

5. Reťazec rezistorov

Riešenie:



Obr. RB-2

Časť reťazca napravo (naľavo) od uzlov 0 a 0' nahradíme rezistorom R_x . Ak je reťazec veľmi dlhý, je odpor napravo od uzlov 0-0' rovnaký ako napravo od uzlov 1-1', obr. RB-2 vpravo. Pre odpor R_x platí

$$R_x = 2R + \frac{1}{G + \frac{1}{R_x}}.$$

Po úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$R_x^2 - 2 R R_x - 2 \frac{R}{G} = 0,$$

ktorá má riešenie

$$R_x = R \pm \sqrt{R^2 + 2 \frac{R}{G}} \quad (\text{pre } R_x > 0 \text{ platí znamienko } +)$$

$$R_x = R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right). \quad (\text{Pre dané hodnoty } R_x = 10,8 \, \Omega)$$

a) Vodivosť vedenia vzhľadom na uzly 0-0' znázorňuje obr. RB-2 vľavo.

$$G_0 = G + 2 \frac{1}{R_x} = G + \frac{2}{R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right)}.$$

Prúd zdroja

$$I_0 = U_0 G_0 = U_0 \left[G + \frac{2}{R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right)} \right].$$

Pre dané hodnoty $I_0 = 74,8 \, \text{A}$.

2 b

Výkon zdroja

$$P = U_0 I_0 = U_0^2 \left[G + \frac{2}{R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right)} \right].$$

Pre dané hodnoty $P = 29,9 \, \text{kW}$.

2 b

b) Ak je medzi uzlami 0-0' napätie U_0 , potom medzi uzlami 1-1' je napätie

$$U_1 = U_0 - 2 R \frac{I_0}{2} = U_0 (1 - R G_0) = U_0 \left[1 - R G - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}}} \right],$$

prípadne iný spôsob $U_1 = U_0 \frac{R_1}{2R + R_1}$, kde $\frac{1}{R_1} = G + \frac{1}{R_x}$.

Pomer napätí

$$\frac{U_1}{U_0} = 1 - R G - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}}}. \quad (\text{Pre dané hodnoty } U_1/U_0 = 0,978)$$

Rovnako dostaneme rovnaký pomer napätí medzi uzlami 2-2' a 1-1', atď.

Napätie medzi uzlami $n-n'$ vo vzdialenosti $\ell = n L$

$$U_n = U_0 \left[1 - \frac{RG}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}}} \right]^{\ell/L}.$$

Pre dané hodnoty veličín $U_{10} = 319 \text{ V}$.

2 b

c) Do pravej vetvy dodáva zdroj výkon

$$P_1 = \frac{U_0^2}{R_x} = \frac{U_0^2}{R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right)}, \text{ pre dané hodnoty } P_1 = 14,8 \text{ kW}.$$

2 b

Teplu uvoľnené vo vedení $Q = P_1 - P_n$. Relatívna strata výkonu

$$k = \frac{Q}{P_1} = 1 - \frac{P_n}{P_1} = 1 - \left(\frac{U_n}{U_0} \right)^2 = 1 - \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}}}{2 + (2RG + 1) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{RG}} \right)} \right]^{2\ell/L}.$$

Pre dané hodnoty $k = 36,5 \%$.

2 b

6. Elektrostatika

Riešenie:

Nabitá platnička vytvára tesne nad povrchom elektrické pole s intenzitou

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad 1 \text{ b}$$

kde $\sigma = Q/S$ je plošná hustota náboja platničky, pozri obr. RB-3.

Vektor intenzity E_0 je kolmý na povrch platničky.

Toto pole indukuje vo vrstve kvapaliny indukované pole s intenzitou E_v , pričom výsledné pole v kvapaline $E = E_0 - E_v = E_0/\varepsilon_r$. V dôsledku

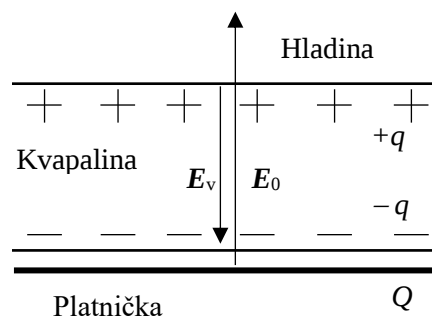
polarizácie dielektrika sa vytvorí na hornom a dolnom povrchu kvapaliny povrchový náboj $\pm q$ s hustotou $\sigma_v = \pm q/S$. Intenzita indukovaného elektrického poľa $E_v = \sigma_v/\varepsilon_0$ a indukovaný náboj

$$q = S \sigma_v = \varepsilon_0 S E_v = \varepsilon_0 S E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) = \varepsilon_0 S \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}. \quad 1 \text{ b}$$

Na hladinu s nábojom q pôsobí elektrické pole vytvorené nábojom Q platničky a nábojom $-q$ dolného povrchu kvapaliny

$$E_1 = \frac{Q - q}{2\varepsilon_0 S} \quad 1 \text{ b}$$

silou $F_1 = q E_1$, a teda tlakom



Obr. RB-3

$$p_e = \frac{F_1}{S} = \frac{q(Q-q)}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{\frac{Q}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \left(Q - \frac{Q}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right)}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S^2} \frac{\varepsilon_r^2 - 1}{\varepsilon_r^2}. \quad 1 \text{ b}$$

Proti tomuto tlaku pôsobí atmosférický tlak. Keďže na celej hladine musí byť výsledný tlak atmosférický, dochádza na ploche nad platničkou k zvýšeniu hladiny kvapaliny o Δh_1 a súčasnému zníženiu hladiny o Δh_2 v zvyšnej časti hladiny tak, že voči zvyšnej časti hladiny je elektrostatický tlak p_e kompenzovaný hydrostatickým tlakom $p_h = (\Delta h_1 + \Delta h_2) \rho g$.

Keďže objem kvapaliny sa zachováva, platí

$$\pi \frac{d^2}{4} \Delta h_1 = \pi \frac{D^2 - d^2}{4} \Delta h_2, \text{ odkiaľ } \Delta h_2 = \frac{d^2}{D^2 - d^2} \Delta h_1 \text{ a teda}$$

$$p_h = \rho g (\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{D^2}{D^2 - d^2} \rho g \Delta h_1 = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S^2} \frac{\varepsilon_r^2 - 1}{\varepsilon_r^2}. \quad 1 \text{ b}$$

Hladina nad platničkou sa zvýši. 2 b

Prírastok hrúbky vrstvy kvapaliny nad platničkou

$$\Delta h_1 = \frac{2Q^2}{\pi^2 \varepsilon_0 d^4 \rho g} \frac{\varepsilon_r^2 - 1}{\varepsilon_r^2} \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \right).$$

Pre dané hodnoty $\Delta h_1 = 1,15 \text{ mm}$. 3 b

7. Avogadrova konštanta – experimentálna úloha

Riešenie:

Určíme čas elektrolýzy pre elektrický prúd I a hmotnosť m vylúčenej medi.

Počet atómov s celkovou hmotnosťou m je $N = m/m_{\text{Cu}} = m/(A_{\text{Cu}} u)$, kde $A_{\text{Cu}} = 63,55$ je relatívna atómová hmotnosť a $u = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$ atómová hmotnostná jednotka.

Na vylúčenie N dvojmocných iónov medi je potrebný náboj $Q = z N e$, kde $z = 2$ a $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ je elementárny náboj. Celkový prúd, ktorý prejde elektrolytom $Q = I t$, odkiaľ určíme čas

$$t = \frac{z e}{A_{\text{Cu}} u} \frac{m}{I}.$$

Hmotnosť atómu vyjadríme pomocou molárnej hmotnosti medi $M_{\text{m Cu}} = 63,55 \text{ g/mol}$ a Avogadrovej konštanty N_A : $m_{\text{Cu}} = M_{\text{m Cu}} / N_A$.

Pomocou meraní získaných hodnôt určíme Avogadrovu konštantu zo vzťahu

$$N_A = \frac{M_{\text{m Cu}}}{z e} \frac{I t}{m}.$$

Hodnotu porovnáme s tabuľkovou hodnotu $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Podľa úrovne spracovania max. 10 b

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy domáceho kola kat. B

Návrh a úprava úloh:	Lubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh:	Lubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydalo:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024