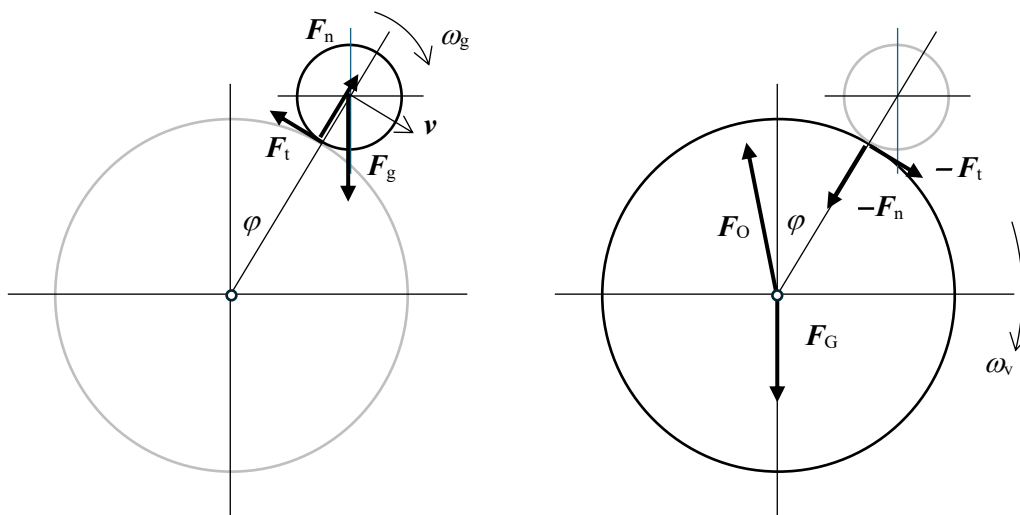


67. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2025/2026
kategória A
riešenie úloh krajského kola

1. úloha - Gul'a na valci

Riešenie:

a)



Na guľôčku pôsobia sily: tiažová F_g , trenia F_t a tlaková F_n ,

na valec: tiažová F_G , trenia $-F_t$, tlaková $-F_n$ a sila v ložisku osi F_O – vektorový súčet všetkých síl je nulový, keďže valec nevykonáva posuvný pohyb.

Guľôčka sa bude kotúľať po povrchu valca až do bodu oddelenia od povrchu a ďalej pokračuje šikmým vrhom nadol. Valec sa bude v dôsledku pôsobenia momentu sily trenia otáčať v rovnakom smere ako guľôčka (na obrázku v smere pohybu hodinových ručičiek). Momenty zvyšných síl vzhľadom na os otáčania valca sú nulové.

- b) Guľôčka sa pohybuje po povrchu valca, pokiaľ je veľkosť tlakovej sily F_n nenulová. Keďže sa hmotný stred guľôčky pohybuje po kružnici s polomerom $R + r$, má priemet pohybovej rovnice do radiálneho smeru tvar

$$m \frac{v^2}{R + r} = m g \cos \varphi - F_n.$$

V okamihu, keď guľôčka stratí kontakt s valcom, je $F_n = 0$, $v = v_1$ a $\varphi = \varphi_1$

$$v_1^2 = g(R + r) \cos \varphi_1 \quad (1)$$

Keďže sila statického trenia ani tlaková sila nekonajú prácu (nedochádza k strate mechanickej energie), je zmena mechanickej energie sústavy nulová. Potenciálna energia guľôčky klesá a kinetická energia valca a guľôčky rastie.

Zmena potenciálnej energie sústavy $\Delta E_p = -m g (R + r)(1 - \cos \varphi_1)$.

Kinetická energia valca (iba rotačná) $E_{kv} = \frac{1}{2} I_v \omega_{v1}^2$

a kinetická energia guľôčky (posuvný aj rotačný pohyb)

$$E_{\text{kg}} = \frac{1}{2} I_{\text{g}} \omega_{\text{gl}}^2 + \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Podľa zákona zachovania mechanickej energie dostávame

$$\frac{1}{2} I_{\text{v}} \omega_{\text{vl}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{g}} \omega_{\text{gl}}^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 - m g (R + r) (1 - \cos \varphi_1) = 0. \quad (2)$$

Pohybová rovnica otáčania valca má tvar

$$I_{\text{v}} \omega_{\text{v}} = \int_0^t R F_{\text{t}} dt$$

a pre guľôčku

$$I_{\text{g}} \omega_{\text{g}} = \int_0^t r F_{\text{t}} dt.$$

Z porovnania dostávame

$$\int_0^t F_{\text{t}} dt = \frac{I_{\text{v}}}{R} \omega_{\text{v}} = \frac{I_{\text{g}}}{r} \omega_{\text{g}}, \text{ resp. } \int_0^{t_1} F_{\text{t}} dt = \frac{I_{\text{v}}}{R} \omega_{\text{vl}} = \frac{I_{\text{g}}}{r} \omega_{\text{gl}} \quad (3)$$

Keďže sa guľôčka neprešmykuje, pre rýchlosť bodu dotyku, ktorý sa pohybuje rovnakou uhlovou rýchlosťou ako hmotný stred guľôčky, platí

$$R \omega_{\text{v}} = v - r \omega_{\text{g}}, \text{ resp. } R \omega_{\text{vl}} = v_1 - r \omega_{\text{gl}} \quad (4)$$

Zo štyroch rovníc (1) až (4) pre štyri neznáme dostaneme postupnými úpravami

$$\omega_{\text{gl}} = \frac{v_1}{r} \frac{I_{\text{v}} r^2}{I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2} \quad \text{a} \quad \omega_{\text{vl}} = \frac{v_1}{R} \frac{I_{\text{g}} R^2}{I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2}, \quad (5)$$

dosadením do (2)
$$v_1^2 = \frac{2 g (R + r) (1 - \cos \varphi_1)}{\frac{I_{\text{v}}}{m} \frac{I_{\text{g}}^2 R^2}{(I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2)^2} + \frac{I_{\text{g}}}{m} \frac{I_{\text{v}}^2 r^2}{(I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2)^2} + 1}.$$

Dosadením do (1) potom dostaneme

$$\cos \varphi_1 = \frac{2}{\frac{I_{\text{v}}}{m} \frac{I_{\text{g}}^2 R^2}{(I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2)^2} + \frac{I_{\text{g}}}{m} \frac{I_{\text{v}}^2 r^2}{(I_{\text{g}} R^2 + I_{\text{v}} r^2)^2} + 3}$$

a po dosadení za momenty zotrvačnosti a úprave

$$\cos \varphi_1 = 2 \frac{4m + 5M}{12m + 17M}. \quad (6)$$

Veľkosť rýchlosti guľôčky v okamihu oddelenia od povrchu valca

$$v_1 = \sqrt{2 g (R + r)} \sqrt{\frac{4m + 5M}{12m + 17M}} \quad (7)$$

c) Určíme uhlové rýchlosti dosadením do vzťahov (5)

$$\omega_{\text{gl}} = \frac{1}{r} \sqrt{2 g (R + r)} \frac{5M}{\sqrt{(4m + 5M)(12m + 17M)}}$$

a
$$\omega_{\text{vl}} = \frac{1}{R} \sqrt{2 g (R + r)} \frac{4m}{\sqrt{(4m + 5M)(12m + 17M)}}.$$

d) Kým guľôčka dosiahne bod oddelenia od povrchu valca, prejde uhlovou výchylkou φ_1 , ktorú vyjadríme s použitím rovnice (4) a (3)

$$\varphi_1 = \int_0^{t_1} \frac{v}{R+r} dt = \int_0^{t_1} \frac{R\omega_v + r\omega_g}{R+r} dt = \left(1 + \frac{5M}{4m}\right) \frac{R}{R+r} \int_0^{t_1} \omega_v dt. \quad (8)$$

Medzitým sa ale valec pootočí o uhol $\varphi_{v1} = \int_0^{t_1} \omega_v dt$.

Gulôčka prejde po povrchu valca dráhu

$$s = R(\varphi_1 - \varphi_{v1}) = R \left(\frac{4m+5M}{4m} \frac{R}{R+r} - 1 \right) \int_0^{t_1} \omega_v dt,$$

$$\text{kde zo (8)} \quad \int_0^{t_1} \omega_v dt = \frac{4m}{4m+5M} \frac{R+r}{R} \varphi_1,$$

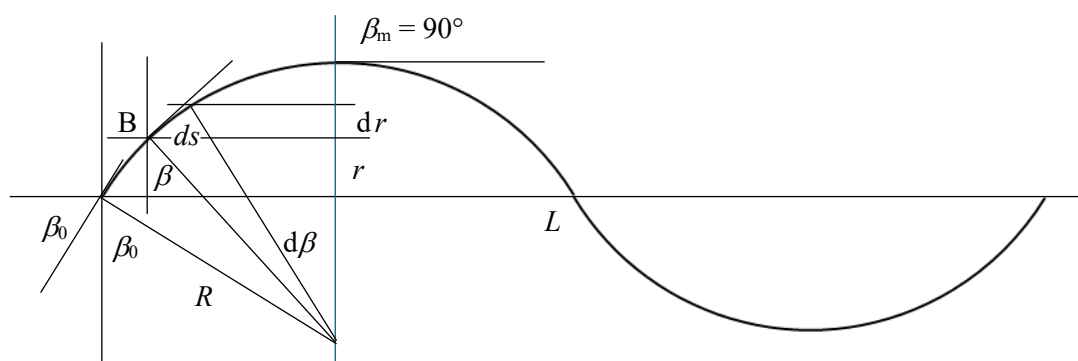
$$\text{a teda} \quad s = \left(1 - \frac{4m}{4m+5M} \frac{R+r}{R} \right) (R+r) \varphi_1$$

$$\text{a po dosadení z (6)} \quad s = \left(1 - \frac{4m}{4m+5M} \frac{R+r}{R} \right) (R+r) \arccos \left(2 \frac{4m+5M}{12m+17M} \right).$$

2. úloha - GI-MM optické vlákno

Riešenie:

a) Obrázok



Na čele vlákna dochádza k lomu. Do vlákna lúč vstupuje pod uhlom β_0 vzhľadom na os

$$n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta_0.$$

Zvolíme vhodný bod B na lúči, v ktorom lúč zvierá s osou uhol β . Ak uvažíme vrstvu vlákna vo vzdialenosti r od osi, je uhol dopadu na túto vrstvu $\gamma = 90^\circ - \beta$, pričom platí

$$n_1 \sin \gamma_0 = n \sin \gamma. \quad (1)$$

Ak sa posunieme o hrúbku vrstvy dr , je zodpovedajúca dĺžka lúča

$$ds = R d\gamma, \text{ kde } R \text{ je polomer oblúku kružnice.}$$

Ak derivujeme vzťah (1) podľa uhlu dopadu γ , dostaneme

$$0 = \frac{dn}{d\gamma} \sin \gamma + n \cos \gamma, \text{ odkiaľ } dn \sin \gamma = -n \cos \gamma d\gamma$$

$$\text{a po dosadení z (1)} \quad \frac{dn}{n} = -\frac{1}{\tan \gamma} d\gamma. \quad (2)$$

Elementárny uhol vyjadríme pomocou hrúbky vrstvy $d\gamma = \frac{ds}{R} = \frac{dr}{R \cos \gamma}$,

a po dosadení do (2) s použitím (1) máme $\frac{dn}{n^2} = -\frac{1}{n_1 R \sin \gamma_0} dr$.

Ak je R konštantné (oblúk kružnice), dostávame integráciou

$$\int_{n_1}^n \frac{dn}{n^2} = -\frac{1}{n_1 R \sin \gamma_0} \int_0^r dr, \text{ zn. } -\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} = -\frac{1}{n_1 R \sin \gamma_0} r,$$

odkiaľ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} \left(1 + \frac{1}{R \sin \gamma_0} r \right)$,

a teda $n = \frac{n_1}{1 + k r}$, kde $k = \frac{1}{R \sin \gamma_0} = \frac{1}{R \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sin^2 \alpha}}$.

Polomer lúča $R = \frac{1}{k \sin \gamma_0} = \frac{1}{k \cos \beta_0}$. (3)

Pre $r = \frac{d}{2}$ je $n = n_2$, a teda $n_2 = \frac{n_1}{1 + k \frac{d}{2}}$, odkiaľ máme $k = \frac{2}{d} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = 547,9 \text{ m}^{-1}$.

Vzťah pre index lomu $n = \frac{n_1}{1 + \frac{2}{d} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) r}$.

- 2) Aby lúč zostal vo vlákne, musí byť vrchol oblúku kružnice najvyššie na plášti valca, tzn.

$$r_m = R (1 - \cos \beta_0) \leq \frac{d}{2}.$$

Odtiaľ dostávame pre krajnú hodnotu $R (1 - \cos \beta_{0m}) = \frac{d}{2}$, pričom podľa (3) $R = \frac{1}{k \cos \beta_0}$,

takže pre maximálny uhol dopadu

$$\cos \beta_{0m} = \frac{1}{1 + k \frac{d}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Pre maximálny uhol dopadu dostávame

$$\sin \alpha_m = \frac{n_1}{n_0} \sin \beta_{0m} = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \cos^2 \beta_{0m}} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} = 0,24, \text{ a tak } \alpha_m = 14^\circ.$$

- c) Pre vzdialenosť L platí

$$L = 2 R \cos \gamma_0 = 2 \frac{1}{k \sin \gamma_0} \cos \gamma_0 = \frac{n_2}{n_1 - n_2} \frac{\sin \beta_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_0}} d = \frac{n_2}{n_1 - n_2} \frac{n_0 \sin \alpha}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha}} d.$$

Pre medzný uhol dopadu dostávame

$$L_m = \frac{n_2}{n_1 - n_2} \frac{n_0 \sin \alpha_m}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_m}} d = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}} d = 606 \text{ } \mu\text{m}.$$

Pre uhly $\alpha < \alpha_m$ je vzdialenosť L menšia.

3. úloha - Model atómu vodíka v magnetickom poli

Riešenie:

- a) Elektrón sa pohybuje po kružnici v elektrickom poli kladného jadra (protónu). Pohybová rovnica má tvar

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}, \text{ kde } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1)$$

Moment hybnosti

$$L = mvr. \quad (2)$$

Energia elektrónu

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k \frac{e^2}{r}. \quad (3)$$

Z (1) a (3) určíme rýchlosť a polomer a vyjadríme moment hybnosti

$$r = -k \frac{e^2}{2E} = k \frac{e^2}{2|E|} \text{ pre } E < 0, \quad v = \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \text{ a } L = \frac{ke^2}{2} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

Pre hodnotu E_1 dostávame $L_1 = 1,054 \times 10^{-34}$ J·s.

Pozn.: Táto hodnota sa označuje $\hbar$ a nazýva sa redukovaná Planckova konštanta ($\hbar = h/(2\pi)$).

- b) Za L dosadíme $L_2 = 2L_1$

$$L_2 = 2L_1 = \frac{ke^2}{2} \sqrt{\frac{2m}{|E_2|}} = ke^2 \sqrt{\frac{2m}{|E_1|}},$$

odkiaľ máme $|E_2| = \frac{1}{4}|E_1|$, resp. $E_2 = \frac{1}{4}E_1 = -3,401$ eV.

Pri prechode z vyššieho stavu do nižšieho sa uvoľní rozdielová energia vo forme fotónu s vlnovou dĺžkou

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = 1,22 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Táto vlnová dĺžka zodpovedá UV žiareniu.

Pozn.: Výsledok zodpovedá prvej spektrálnej čiare Lymanovej série.

- c) Elektrický prúd je definovaný ako elektrický náboj, ktorý prejde daným prierezom za jednotku času. V našom prípade $I = -e/T$, kde T je perióda obehu orbity.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi ke^2}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

$$\text{a } \mu = -\frac{e}{T} \pi r^2 = -\frac{ke^3}{4} \sqrt{\frac{2}{m|E|}}. \text{ Pre } E = E_1 \text{ máme } \mu_1 = -9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Vektor μ má opačnú orientáciu ako vektor L .

Pozn.: Táto hodnota $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ sa nazýva Bohrov magnetón.

4. úloha - Kedy vzniklo Slnko?

Riešenie:

- a) Slnko vyžaruje žiarenie ako dokonale čierne teleso podľa Stefanovho–Boltzmannovho zákona

$$P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

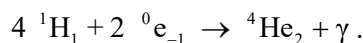
Teplotu povrchu Slnka určíme pomocou Wienovho posuvného zákona

$$T_S = \frac{b}{\lambda_m}.$$

Výkon Slnka je tak

$$P_S = 4\pi R_S^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 3,86 \times 10^{26} \text{ W}.$$

- b) Pre zjednodušenie uvažujeme v jadre Slnka iba protón–protónovú reakciu. Pre vznik alfa častice sú potrebné 4 protóny (jadra hélia) a dva elektróny. Ak neuvažujeme vznikajúce neutrína a voľné elektróny, je zjednodušená reakcia



Energia fotónu

$$E_\gamma = (4m_p + 2m_e - m_\alpha) c^2 = 26,77 \text{ MeV}.$$

Ak uvažíme celkový vyžarovaný výkon, za sekundu vznikne nasledujúci počet jadier hélia

$$n_{\text{He}} = \frac{P_S}{E_\gamma}$$

a hmotnosť vznikajúceho hélia

$$\mu_{\text{He}} = \frac{P_S}{E_\gamma} m_\alpha = \frac{4\pi R_S^2 \sigma m_\alpha}{(4m_p + 2m_e - m_\alpha) c^2} \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 5,98 \times 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- c) Z experimentálnych zistení došlo k zvýšeniu podielu hélia v Slnku

$$\Delta M_{\text{He}} = (p_{\text{He}} - p_{\text{He}0}) M_S.$$

Pri rovnomernom priebehu reakcie toto hélium vzniklo za čas

$$t_S = \frac{M_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}} = 3,3 \text{ mld rokov}.$$

V súčasnosti sa odhaduje vek Slnka 4,6 mld rokov. S ohľadom na zjednodušenia je výsledok výpočtu prijateľný.

Fyzikálna olympiáda – 67. ročník – úlohy krajského kola kategórie A

Návrh a spracovanie úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Konrád

Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2026