

67. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2025/2026
kategória A
riešenie úloh domácej prípravy

1. úloha - Kmity hranola na doske – oprava časti b)

Riešenie:

V dôsledku tlakovej sily guľôčky sa začne doska otáčať smerom k vodorovnej polohe a guľôčka sa začne valiť po povrchu dosky smerom k stredu O. Môžu nastať dva extrémne prípady.

Ak je uhol φ_0 veľmi malý, predtým, ako dosiahne guľôčka stred O, zmení sa uhol φ na záporný, guľôčka zastane a začne sa pohybovať nazad až postupne opustí dosku na ľavej strane. Môže to nastať hneď po prvom otočení alebo po niekoľkých zmenách smeru valivého pohybu.

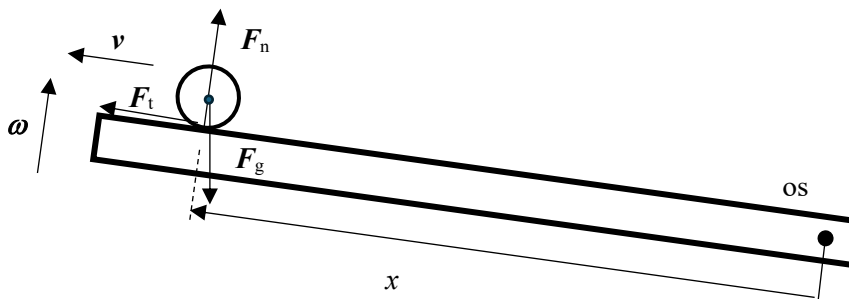
Ak je uhol φ_0 príliš veľký, guľôčka získa veľkú rýchlosť a prejde za bod O ďalej ako x_0 . Spadne z tyče na pravej strane ihneď, alebo po niekoľkých kmitoch.

Dá sa očakávať, že existuje prípad, keď guľôčka prejde na druhej strane do vzdialenosti x_0 a bude sa rovnako vracat', čo sa periodicky opakuje.

Sú tak možné celkom 3 prípady. 1) guľôčka sa odkotúľa z dosky na pravej strane, 2) guľôčka sa odkotúľa z dosky na ľavej strane, 3) guľôčka bude na doske vykonávať harmonický pohyb.

2 b

b) Kladný smer výchyliek x a φ uvažujeme v smere šípok v obrázku zadania.



Na guľôčku pôsobí tiažová sila $F_g = m_2 g$ a v mieste dotyku s doskou normálová tlaková sila F_n a dotyčnicová sila statického trenia F_t . Na dosku pôsobí v mieste dotyku reakcia na tlakovú silu $-F_n$, reakcia na silu trenia $-F_t$, v osi tiažová sila F_G a reakčná sila v osi F_R .

Pohyb guľôčky riešime v neinerciálnej vzťažnej sústave spojenej s pohybujúcou sa doskou, ktorá sa oráča okolo osi dosky nerovnomerne zrýchleným pohybom. Na guľôčku tak pôsobí zotrvačná (odstredivá) sila $F_o = m_2 \omega^2 x$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania dosky.

Pohybová rovnica guľôčky v smere dosky

$$m_2 a_t = -m_2 g \sin \varphi + m_2 \omega^2 x + F_t, \text{ kde } a_t = \ddot{x}, \quad (1)$$

v smere kolmom na povrch dosky je zrýchlenie guľôčky vzhľadom na dosku nulové

$$0 = -m_2 g \cos \varphi + F_n - m_2 a_n, \text{ kde } a_n = x \ddot{\varphi}. \quad (2)$$

Chyba v pôvodnom riešení $a_n = r \ddot{\varphi}$. Dôsledok chyba v rovnici (6) – správne $m_2 x^2$ namiesto $m_2 r x$.

Pohybová rovnica rotácie guľôčky okolo jej osi prechádzajúcej stredom a rovnobežnej s osou dosky

$$I_G \varepsilon_G = F_t r, \text{ kde } I_G = \frac{2}{5} m_2 r^2 \quad \text{a} \quad \varepsilon_G = -\frac{\ddot{x}}{r}. \quad (3)$$

Pohybovú rovnicu otáčania dosky okolo jej pevnej osi vyjadríme v inerciálnej sústave. Na dosku pôsobí iba moment tlakovej sily guľôčky, momenty zvyšných síl (tiažovej a reakcie v osi) sú nulové.

$$I_D \ddot{\varphi} = -F_n x, \text{ kde } I_D = \frac{1}{12} m_1 \ell^2. \quad (4)$$

Vyjadríme sústavu rovníc pre kinematické veličiny x a φ .

Z rovníc (1) a (3) vylúčime F_t . Po úprave máme

$$\frac{7}{5} m_2 \ddot{x} = -m_2 g \sin \varphi + m_2 \omega^2 x. \quad (5) \quad 1 \text{ b}$$

Z rovníc (2) a (4) dostávame

$$\left(\frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_2 x^2 \right) \ddot{\varphi} = -m_2 g x \cos \varphi. \quad (6) \quad 1 \text{ b}$$

Pozn.: Rovnice možno upraviť aj na iný ekvivalentný tvar.

- c) Predpokladáme, že uhol vychýlenia je veľmi malý, čo umožňuje zjednodušiť rovnice na tvar

$$\frac{7}{5} m_2 \ddot{x} = -m_2 g \varphi + m_2 \omega^2 x \quad \text{a} \quad \left(\frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_2 x^2 \right) \ddot{\varphi} = -m_2 g x.$$

Ďalej predpokladáme, že vplyv zotrvačných síl je veľmi malý, čo umožňuje v prvej rovnici zanedbať odstredivú silu, a v druhej zanedbať moment zotrvačnosti guľôčky vzhľadom na os otáčania dosky voči momentu zotrvačnosti dosky k tej istej osi. Rovnice dostanú tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{12 m_2}{m_1 \ell^2} g x \quad (7) \quad 1 \text{ b}$$

$$\ddot{x} = -\frac{5}{7} g \varphi. \quad (8) \quad 1 \text{ b}$$

Ide o sústavu dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc.

- d) Ak chceme zistiť časovú závislosť každej z veličín, musíme dostať rovnice, obsahujúce vždy iba jednu premennú.

Vyjadríme rovnicu iba pre premennú x vylúčením φ . Keď druhú rovnicu dvakrát derivujeme, objaví sa na pravej strane druhá derivácia $\ddot{\varphi}$, a za ňu dosadíme z prvej rovnice

$$x^{(IV)} = \frac{60}{7} \frac{m_2}{m_1} \frac{g^2}{\ell^2} x. \quad (9)$$

Presvedčíme sa, či má rovnica harmonické riešenie. Keďže na začiatku ($t = 0$) je výchylka maximálna a potom klesá, predpokladáme harmonickú funkciu výchylky v tvare

$$x(t) = x_0 \cos \Omega t.$$

Funkciu a jej štvrtú deriváciu dosadíme do rovnice (7)

$$x_0 \Omega^4 \cos \Omega t = \frac{60}{7} \frac{m_2}{m_1} \frac{g^2}{\ell^2} x_0 \cos \Omega t.$$

Rovnica je splnená, ak

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \sqrt{\frac{60}{7} \frac{m_2}{m_1}}} - \text{uhlová frekvencia harmonických kmitov.}$$

Periódá kmitov

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{\ell}{g} \sqrt{\frac{7}{60} \frac{m_1}{m_2}}} . \quad 2 \text{ b}$$

- e) Ak má byť pohyb guľôčky harmonický, tzn. ustálené kmity, musia sa s tou istou periódou opakovať rovnaké podmienky ako na začiatku, tzn. aj uhlová výchylka dosky musí byť harmonická s rovnakou periódou.

Z rovnice (8) vyjadríme časovú závislosť uhlovej výchylky

$$\varphi(t) = -\frac{7}{5g} \ddot{x} = \frac{7}{5g} x_0 \Omega^2 \cos \Omega t = \varphi_0 \cos \Omega t .$$

Odtiaľ máme podmienku pre začiatočné hodnoty veličín x_0 a φ_0

$$\varphi_0 = \frac{7}{5g} x_0 \Omega^2 = \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{21}{5} \frac{m_2}{m_1}} x_0 . \quad 2 \text{ b}$$

Pohyb guľôčky je harmonický ak je splnená táto podmienka.

2. úloha - Webbov teleskop LK

Riešenie:

- a) Vzdialenosť stredu Zeme od hmotného stredu sústavy

$$r_Z = d_{SZ} \frac{M_S}{M_S + M_Z} . \quad 2 \text{ b}$$

- b) Ak má byť ďalekohľad stále na spojnici S–Z, musí obiehať okolo hmotného stredu S–Z rovnakou uhlovou rýchlosťou ako Zem, danou rovnicou

$$G \frac{M_S M_Z}{d_{SZ}^2} = M_Z \omega^2 r_Z ,$$

odkiaľ máme

$$\omega = \sqrt{G \frac{M_S + M_Z}{d_{SZ}^3}} .$$

Pre vzdialenosť r ďalekohľadu od stredu Zeme platí

$$G \frac{M_S m}{(d_{SZ} + r)^2} + G \frac{M_Z m}{r^2} = m \omega^2 (r_Z + r) ,$$

odkiaľ máme

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{d_{SZ}}\right)^2} + \frac{\frac{M_Z}{M_S}}{\left(\frac{r}{d_{SZ}}\right)^2} = 1 + \left(1 + \frac{M_Z}{M_S}\right) \frac{r}{d_{SZ}} .$$

Môžeme označiť relatívne veličiny $x = \frac{r}{d_{SZ}}$ a $p = \frac{M_Z}{M_S}$, dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{p}{x^2} = 1 + (1+p)x . \quad (1)$$

Keďže $p \ll 1$, môžeme rovnicu zjednodušiť a prepísať v tvare

$$\frac{1}{(1+x)^3} - p \frac{x^3 - 1}{x^2(1+x)} = 1 .$$

Z rovnice vyplýva, že musí byť aj $x \ll 1$

Rovnicu upravíme na tvar $1 - \frac{1}{(1+x)^3} = p \frac{1-x^3}{x^2(1+x)} .$

Pomocou približného vzťahu pre $x \ll 1$

$$\frac{1}{(1+x)^3} \approx 1 - 3x \text{ upravíme rovnicu na tvar}$$

$$3x^3 = p ,$$

odkiaľ

$$r \approx d_{SZ} \sqrt[3]{\frac{M_Z}{3 M_S}}$$

Pre $M_S = 2,0 \times 10^{30}$ kg, $M_Z = 6,0 \times 10^{24}$ kg a $d_{SZ} = 150$ mil. km dostávame $r = 1,5 \times 10^6$ km. 5 b

Vo vzdialenosti 1,5 mil. km od stredu Zeme sa nachádza jeden z 5 libračných (Lagrangeových) bodov sústavy Slnko -Zem.

Pozn.: Rovnicu (1) možno riešiť aj numerickou, resp. grafickou metódou.

- c) Rozlišovací schopnosť určuje difrakcia vlnenia na ploche vyžarovacej (detekčnej) plochy. Pre kruhové zrkadlo platí vzťah pre uhol rozlíšenia

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \text{ možno prijať aj vzťah } \theta = \frac{\lambda}{D}, \text{ ktorý platí pre štrbinu.}$$

V prípade oboch teleskopov ide o vlnové dĺžky $\lambda_W \approx 2,6 \mu\text{m}$, $\lambda_H \approx 0,950 \mu\text{m}$.

3 b

Hubbleov teleskop sa využíval najmä v oblasti optického spektra, zatiaľ čo Webbiv teleskop je určený pre oblasť infračerveného žiarenia.

3. úloha - Rovnováha v magnetickom poli

Riešenie:

- a) Na guľôčky pôsobia sily magnetického poľa a vzájomnej elektrickej odpudivosti. Vo vzťažnej sústave spojennej s rotujúcim vláknom pôsobí na guľôčky zotrvačná (odstredivá) sila. Aby mohla nastať situácia, že guľôčky sa nedotknú držiakov D, musia mať kladný elektrický náboj. Pri konštantných otáčkach je pohybová rovnica pohybu guľôčok pozdĺž vlákna

$$m a_A = m \omega^2 r_A - q \omega r_A B + k \frac{q^2}{(r_A + r_B)^2}$$

$$m a_B = m \omega^2 r_B - q \omega r_B B + k \frac{q^2}{(r_A + r_B)^2}$$

Pre rovnovážnu polohu platí $a_A = a_B = 0$, a teda

$$(m \omega^2 - q \omega B) r_A + k \frac{q^2}{(r_A + r_B)^2} = 0 \quad \text{a} \quad (m \omega^2 - q \omega B) r_B + k \frac{q^2}{(r_A + r_B)^2} = 0.$$

Z rozdielu rovníc dostávame podmienku pre stav rovnováhy $r_A = r_B = r$.

V stave rovnováhy sú obidve guľôčky v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania.

Po dosadení do jednej z rovníc dostávame vzdialenosť od osi pre danú uhlovú rýchlosť

$$r = \sqrt[3]{\frac{k}{4} \frac{q^2}{q \omega B - m \omega^2}}, \text{ kde } \omega = 2\pi n \text{ a } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}. \quad (1) \quad 3 \text{ b}$$

- b) Graf závislosti r od n pre dané hodnoty veličín: 2 b

Z grafu vidíme, že určitá minimálna vzdialenosť r_m existuje iba pre jediné otáčky n_m . Rovnovážna vzdialenosť $r > r_m$ existuje pre dve rôzne hodnoty otáčok.

1 b

- c) Určíme minimum funkcie (1). Stačí určiť minimum výrazu pod odmocninou. Pre minimum je derivácia výrazu nulová.

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{q \omega B - m \omega^2} \right) = - \frac{q B - 2 m \omega}{(q \omega B - m \omega^2)^2} = 0,$$

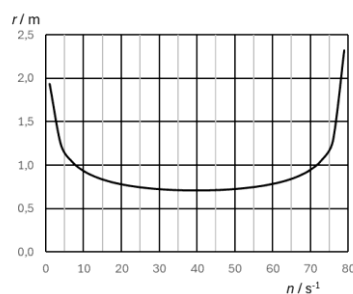
odkiaľ dostávame uhlovú rýchlosť, resp. otáčky, $\omega_m = \frac{q B}{2 m}$, resp. $n_m = \frac{q B}{4 \pi m}$.

Po dosadení do vzťahu (1) máme

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{k m}{B^2}} = 0,71 \text{ m.}$$

Minimálna dĺžka vlákna $L_{\min} = 1,42 \text{ m.}$

2 b



- d) Ak má vlákno dostatočnú dĺžku L , existujú rovnovážne polohy vo vzdialenosti $r < L/2$ od osi otáčania, v rozsahu uhlových rýchlostí pre uhlové rýchlosti dané funkciou (1), z ktorej dostávame kvadratickú rovnicu pre ω

$$\omega^2 - 2 \frac{qB}{2m} \omega + \frac{kq^2}{4mr^3} = 0,$$

a teda

$$\omega_{1,2} = \frac{qB}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 - \frac{kq^2}{4mr^3}}, \text{ resp. } n_{1,2} = \frac{qB}{4\pi m} \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 - \frac{kq^2}{4mr^3}}.$$

Pre dané hodnoty $r_1 = L_1/2$ rovnovážna poloha nenastane.

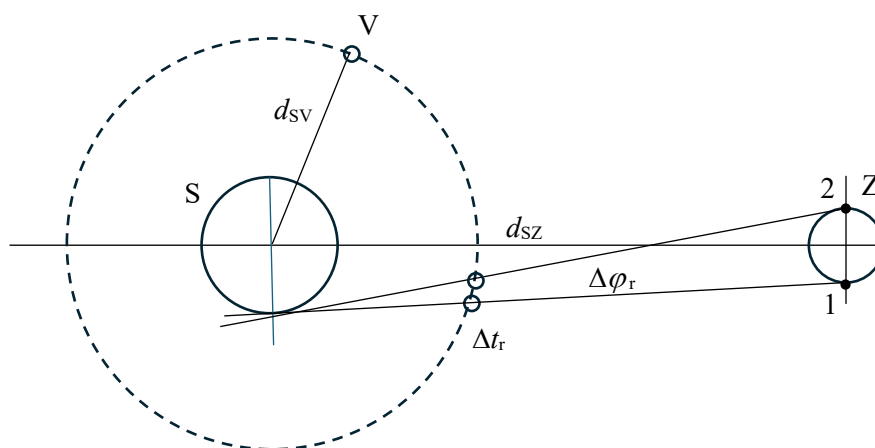
Pre $r_2 = L_2/2$ nastanú dve rovnovážne polohy pre otáčky $n_1 = 7$ ot/s a $n_2 = 73$ ot/s.

2 b

4. úloha - Slnko

Riešenie:

- a) Situáciu znázorňuje obrázok.



Veľkosti telies nie sú v rovnakej mierke, v skutočnosti sú Venuša a Zem v porovnaní so Slnkom bodové objekty.

Uhol φ_V maximálneho odchyľenia Venuše od spojnice S–Z určuje vzťah

$$\sin \varphi_V = \frac{d_{SV}}{d_{SZ}}.$$

Ak pozorujeme vstup Venuše do slnečného kotúča z miest 1 a 2 na Zemi, vidíme, že medzi okamihmi vstupu musí Venuša za čas Δt_r opísať uhol $\Delta \varphi_r = D_Z / d_{SZ}$.

$$\Delta t_r = \frac{\Delta \varphi_r}{\omega_{Vsyn}} = \frac{D_Z}{d_{SZ}} \frac{T_{Vsyn}}{2\pi}, \text{ odkiaľ máme } d_{SZ} = \frac{D_Z}{\Delta t_r} \frac{T_{Vsyn}}{2\pi}$$

Po dosadení $D_Z = 12\,756$ km a daných hodnôt dostávame $d_{SZ} = 149,6$ mil. km.

Priemer Slnka

$$D_S = d_{SZ} \varphi_S = (149,6 \times 10^6 \text{ km}) \times \left(32' \cdot \frac{1^\circ}{60'} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) = 1,392 \text{ mil. km}.$$

Podľa Newtonovho gravitačného zákona

$$G \frac{M_s M_z}{d_{sz}^2} = M_z \left(\frac{2\pi}{T_z} \right)^2 d_{sz}, \text{ odkiaľ máme } M_s = \frac{1}{G} \left(\frac{2\pi}{T_z} \right)^2 d_{sz}^3.$$

Pre $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ dostávame $M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$. 2 b

- b) Pre celkovú vyžiarenu energiu platí

$$\sigma T_s^4 4\pi R_s^2 = Q 4\pi d_{sz}^2.$$

Odtiaľ dostávame

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{Q}{\sigma} \frac{d_{sz}^2}{R_s^2}}.$$

Pre $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ dostávame $T_s = 5780 \text{ K}$.

Celkový vyžiarovaný výkon

$$P_s = Q 4\pi d_{sz}^2 = 3,86 \times 10^{26} \text{ W}. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Podľa Wienovho posuvného zákona

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2,89 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{501 \times 10^{-9} \text{ m}} = 5770 \text{ K},$$

kde $b = 2,89 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ je Wienova konštanta.

Vidíme, že výsledky sú prakticky rovnaké. 2 b

- d) Energia vyžiarená pri jednej syntéze 4 protónov

$$E_\gamma = (4m_p - m_\alpha) c^2 = 4,125 \times 10^{-12} \text{ J} = 25,7 \text{ MeV} \quad 2 \text{ b}$$

- e) Výkon P_s vyžiarený Slnkom zodpovedá sekundovému počtu reakcií

$$n_1 = \frac{P_s}{E_\gamma} = 9,36 \times 10^{37} \text{ reakcií/sa } 4n_1 \text{ atómov vodíka premení na hélium, čo predstavuje}$$

hmotnosť

$$m_1 = 4n_1 m_p = 626 \text{ mil. t. za sekundu.}$$

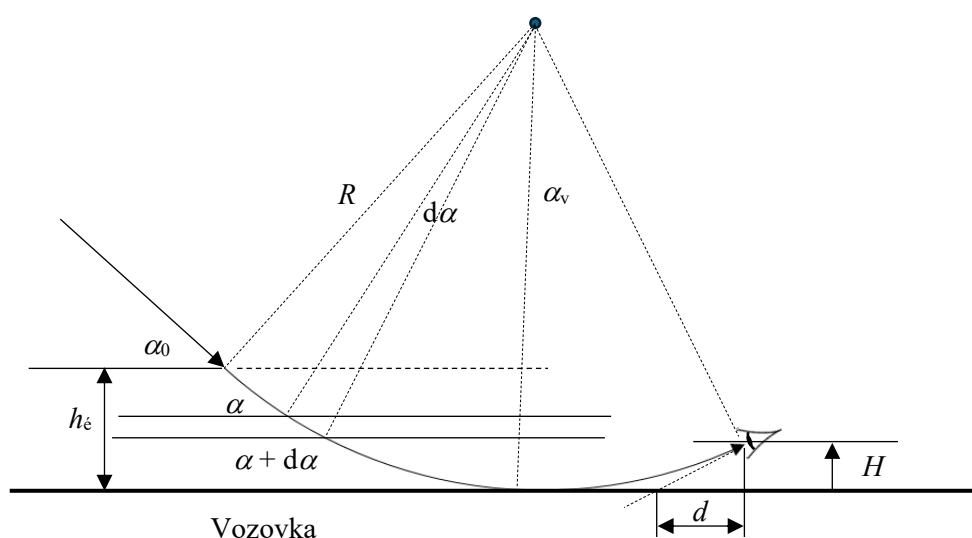
čas potrebný na premenu 10 % zásoby vodíka v jadre Slnka

$$t_2 = \frac{p_H M_s}{m_1} \Delta p = 1,12 \times 10^{17} \text{ s} = 3,5 \text{ mld. rokov}. \quad 2 \text{ b}$$

5. úloha - Zrkadlenie na ceste

Riešenie:

- a) V prírode je to napr. spomenuté zrkadlenie na ceste, fatamorgána v púšti alebo nad hladinou vody v mori, chvenie vzduchu nad teplým radiátorom, astronomická refrakcia pri pozorovaní hviezd, lom svetla na rozhraní dvoch alebo viacerých prostredí, vedenie svetla v gradientovom optickom vlákne, GRIN (Gradient Refraction Index) šošovky, atď. 1 b
- b) Uvažujme lúč prenikajúci do vrstvy nehomogénneho vzduchu.



Predpokladajme, že lúč má tvar oblúku kružnice s polomerom R , obrázok. Na oblúku uvažujeme elementárny úsek s dĺžkou $ds = R d\alpha$, čo zodpovedá výškovému rozdielu $dh = ds \sin \alpha$.

Podľa zákona lomu máme

$$n \cos \alpha = n_0 \cos \alpha_0 \quad (1)$$

$$n \cos \alpha = (n + dn) \cos(\alpha + d\alpha) = (n + dn)(\cos \alpha \cos d\alpha - \sin \alpha \sin d\alpha).$$

Po roznásobení a zanedbaní malého členu $dn \sin d\alpha$, $\sin d\alpha \approx d\alpha$ a $\cos d\alpha \approx 1$

$$dn \cos \alpha = n \sin \alpha d\alpha. \quad (2)$$

Po dosadení za $\cos \alpha$ z (1) a s použitím vyjadrenia dh dostávame rovnicu

$$n_0 \cos \alpha_0 dn = n^2 \sin \alpha d\alpha = \frac{n^2}{R} dh, \text{ resp. } \frac{1}{R n_0 \cos \alpha_0} dh = \frac{dn}{n^2}, \quad (3)$$

kde predpokladáme R konštantné pre oblúk kružnice. Rovnicu integrujeme v medziach od vozovky do výšky h

$$\frac{1}{R n_0 \cos \alpha_0} \int_0^h dh = \int_{n_v}^n \frac{dn}{n^2} = -\frac{1}{n} \Big|_{n_v}^{n_a} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n_v} = \frac{1}{R n_0 \cos \alpha_0} h,$$

odkiaľ máme

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_v} - \frac{1}{R n_0 \cos \alpha_0} h. \quad (4) \quad 2 b$$

Index lomu je lineárnou funkciou hustoty vzduchu

$$n - 1 = k \frac{p M_m}{R_m T}, \text{ pričom } n_0 - 1 = k \frac{p_0 M_m}{R_m T_0}, \text{ odkiaľ } k = \frac{(n_0 - 1) R_m T_0}{p_0 M_m},$$

kde R_m je molárna plynová konštanta, M_m molárna hmotnosť vzduchu a T termodynamická teplota.

Vyjadriť index lomu

$$n = 1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0}, \text{ a pre konštantný tlak v danom prostredí } n = 1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T}.$$

Dosadíme do (4)

$$\frac{1}{1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T}} = \frac{1}{1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T_v}} - \frac{1}{R n_0 \cos \alpha_0} h.$$

Vyjadriť teplotu

$$T = (n_0 - 1) T_0 \frac{R n_0 \cos \alpha_0 - \left(1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T_v}\right) h}{(n_0 - 1) \frac{T_0}{T_v} R n_0 \cos \alpha_0 + \left(1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T_v}\right) h} \quad (5)$$

Z podmienky na hornom okraji nehomogénnej vrstvy $h = h_0$ a $T = T_a$ vyjadriť polomer

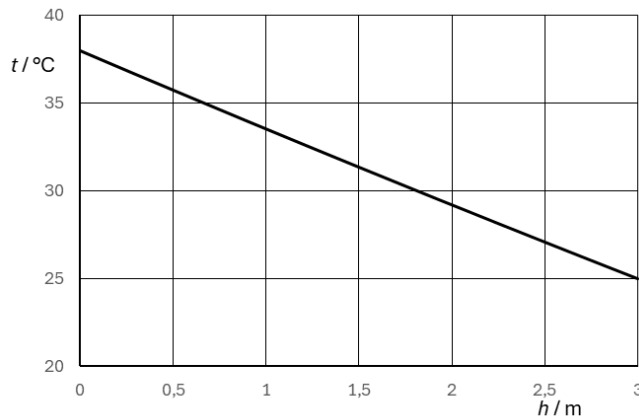
$$R = \frac{\left[(n_0 - 1) T_0 + T_a\right] \left(T_v + (n_0 - 1) T_0\right)}{n_0 (n_0 - 1) T_0 (T_v - T_a) \cos \alpha_0} h_0 \quad (6)$$

Po dosadení do vzťahu (5) dostaneme pre teplotu po úpravách napr. vzťah (môže mať aj iný tvar)

$$T = T_v \frac{T_a + (n_0 - 1) T_0 - (n_0 - 1) T_0 \left(1 - \frac{T_a}{T_v}\right) \frac{h}{h_0}}{T_a + (n_0 - 1) T_0 + T_v \left(1 - \frac{T_a}{T_v}\right) \frac{h}{h_0}}. \quad (7)$$

Graf funkcie $t = f(h)$ pre dané hodnoty veličín

3 b



Pozn.:

Pre dané hodnoty možno použiť určité zanedbania, najmä pre $n_0 - 1 \ll 1$ a $T_a \approx T_v \approx T_0$

$$T \approx \frac{T_a T_v}{T_a + (T_v - T_a) \frac{h}{h_0}}. \quad (8)$$

V podstate ide o veľmi krátky úsek hyperboly, ktorý možno aproximovať úsečkou.

$$R \approx \frac{1}{(n_0 - 1) n_0 T_0} \frac{T_a T_v}{T_v - T_a} \frac{h_0}{\cos \alpha_0}. \quad (9)$$

- c) Po vniknutí do vrstvy vzduchu s teplotným gradientom prenikne lúč do hĺbky pod horný okraj vrstvy (obrázok)

$$y = R(1 - \cos \alpha_0) .$$

Lúč sa „odrazí“ od nehomogénnej vrstvy, ak $y < h_o$, tzn.

$$y = R(1 - \cos \alpha_0) < h_o .$$

Po dosadení za R a pre $T_v > T_a$

$$\frac{1}{\cos \alpha_0} < 1 + \frac{(T_v - T_a) T_0 n_0 (n_0 - 1)}{T_a T_v + (T_a + T_v) T_0 (n_0 - 1) + T_0^2 (n_0 - 1)^2} ,$$

prípadne po zjednodušení

$$\frac{1}{\cos \alpha_0} < 1 + \frac{(T_v - T_a) T_0}{T_a T_v} n_0 (n_0 - 1)$$

a po úprave

$$\cos \alpha_0 > \frac{1}{1 + n_0 (n_0 - 1) \left(\frac{T_v - T_a}{T_a T_v} \right) T_0} = \cos \alpha_{\max} . \quad (10)$$

Ak má lúč dopadnúť do oka vodiča vo výške H nad vozovkou, musí byť $y > h_o - H$, tzn.

$$y = R(1 - \cos \alpha_0) > h_o - H .$$

Po dosadení za R dostávame

$$\cos \alpha_0 < \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{H}{h_o} \right) \frac{n_0 (n_0 - 1) T_0 (T_v - T_a)}{[(n_0 - 1) T_0 + T_a] (T_v + (n_0 - 1) T_0)}} = \cos \alpha_{0\min} ,$$

prípadne po zanedbaní malých členov

$$\cos \alpha_{0\min} \approx \frac{1}{1 + n_0 (n_0 - 1) T_0 \frac{T_v - T_a}{T_a T_v} \left(1 - \frac{H}{h_o} \right)} .$$

Zrkadlenie vodič pozoruje pri uhloch dopadu lúčov na nehomogénnu vrstvu vzduchu

$$\alpha_{0\min} < \alpha_0 < \alpha_{0\max} .$$

Najbližší okraj zrkadlenia je vo vzdialenosti, ktorá zodpovedá $\alpha_{0\max}$ (pozri obrázok). Vodič vidí zrkadlenie pod uhlom α_v daným vzťahom

$$H = R_{\min} (1 - \cos \alpha_v) ,$$

kde

$$R_{\min} \approx \frac{1}{(n_0 - 1) n_0 T_0} \frac{T_a T_v}{T_v - T_a} \frac{h_o}{\cos \alpha_{0\max}}$$

a po dosadení

$$R_{\min} \approx \left[\frac{T_a T_v}{T_v - T_a} + n_0 (n_0 - 1) T_0 \left(1 - \frac{H}{h_o} \right) \right] \frac{h_o}{n_0 (n_0 - 1) T_0} \approx \frac{T_a T_v}{T_v - T_a} \frac{h_o}{n_0 (n_0 - 1) T_0} .$$

Odtiaľ

$$\cos \alpha_v = 1 - \frac{H}{R_{\min}} = 1 - n_0 (n_0 - 1) T_0 \frac{T_v - T_a}{T_a T_v} \frac{H}{h_o}$$

a vzdialenosť

$$d_{\min} = \frac{H}{\tan \alpha_v} = H \frac{\cos \alpha_v}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_v}} = \frac{H}{\sqrt{\frac{1}{\left(1 - n_0(n_0 - 1) \frac{T_0(T_v - T_a)}{T_a T_v} \frac{H}{h_0}\right)^2 - 1}}}$$

Vodič má dojem, že zrkadlenie vychádza z miesta na vozovke vo vzdialenosti $d_{\min}$ a dosahuje až do nekonečna pre $\alpha_{0\min}$.

Všimnite si ilustračný obrázok zrkadlenia v zadání úlohy.

Pre dané hodnoty $0,21^\circ < \alpha_0 < 0,27^\circ$ a $403 \text{ m} < d < \infty$.

4 b

6. úloha - Difrakcia elektrónov

Riešenie:

- a) Atóm vo vrchole kocky je spoločný 8 susedným kockám, tzn. k jednej bunke prispieva podielom $1/8$. Pri počte 8 atómov je to príspevok 1 atóm. Atómy v stredoch stien sú spoločné vždy 2 susedným bunkám, tzn. celkový príspevok je $\frac{1}{2} \times 6 = 3$ atómy. Každá bunka tak prispieva ku kryštálu $n = 4$ atómami.

1,5 b

Hustota monokryštalickej látky

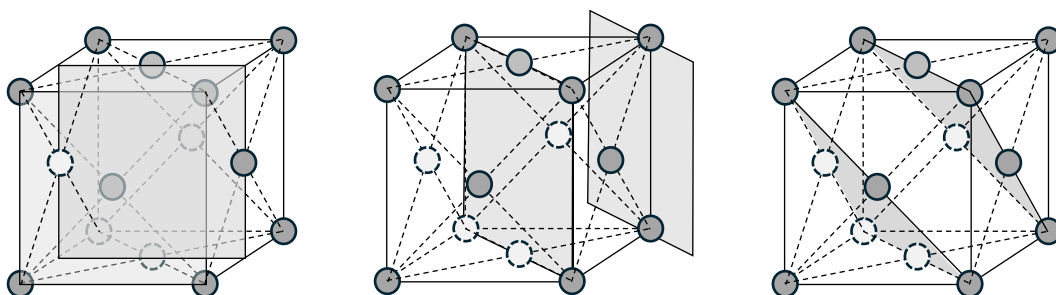
$$\rho = \frac{n m_{\text{Ni}}}{a^3}, \text{ odkiaľ máme } a = \sqrt[3]{\frac{n m_{\text{Ni}}}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{n M_m}{N_A \rho}}.$$

2 b

Pri atómovej hmotnosti $M_m = 58,69 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ a $\rho = 8,908 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dostávame $a = 0,352 \text{ nm}$.

- b) V prvom prípade sú roviny rovnobežné s čelnou stenou a vzdialenosť je $a_1 = a/2$.

0,5 b



V druhom prípade sú roviny kolmé na stenovú uhlopriečku a vzájomná vzdialenosť je polovica stenovej uhlopriečky, tzn. $a_2 = a / \sqrt{2}$.

0,5 b

V treťom prípade sú roviny kolmé na telesovú uhlopriečku a ich vzájomná vzdialenosť je tretina telesovej uhlopriečky, tzn. $a_3 = a / \sqrt{3}$.

0,5 b

- c) Ak sú elektróny urýchľované napätím U (za predpokladu veľmi malej začiatočnej rýchlosti), nadobudnú hybnosť danú rovnicou

$$\frac{p^2}{2m} = eU, \text{ odkiaľ máme } p = \sqrt{2meU}.$$

Vlnová dĺžka elektrónov podľa de Broglieho vzťahu

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Vlnenie odrazené od spodnej roviny atómov prekoná dlhšiu dráhu o $\delta = 2d \cos \varphi$.

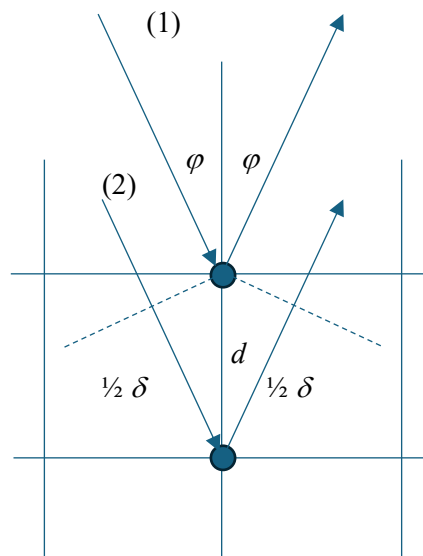
Ak je $\delta = k\lambda$, kde k je celé číslo, dochádza ku konštruktívnej interferencii.

Z tejto podmienky dostávame

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{\delta}{k} = \frac{2d \cos \varphi}{k}.$$

Pre prvé interferenčné maximum ($k = 1$) máme

$$U_n = \frac{1}{2me} \left(\frac{kh}{2d \cos \varphi} \right)^2. \quad 3 \text{ b}$$



- d) Pre dané hodnoty dostávame $U_1 = 54,1 \text{ V}$ a $U_2 = 216 \text{ V}$.

2 b

Hodnoty zodpovedajú výsledkom Davissonova - Germerovho experimentu.

7. úloha - Meranie tiažového zrýchlenia – experimentálna úloha

Riešenie úlohy

max. 10 bodov

Fyzikálna olympiáda – 67. ročník – úlohy domácej prípravy kat. A

Návrh a spracovanie úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp

Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Úlohy preložil: Aba Teleki

Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025