

Úvod do FO

Autori: Ivo Čáp, Ľubomír Konrád

Pozn.: Metodická pomôcka je určená najmä pre riešiteľov kategórie A. Riešitelia nižších kategórií môžu pomôcku využiť v rozsahu primeranom danej kategórii.

Fyzika je veda, ktorá sa zaoberá skúmaním materiálneho sveta, ktorý vnímame priamo alebo sprostredkované prostredníctvom našich zmyslov. Našou snahou je pochopiť podstatu javov, ktoré náš svet utvárajú, ktoré pozorujeme a ktoré na náš život vplývajú. Správne pochopenie podstaty dejov nám umožňujú správne reagovať na situácie, ktorý pred nás život kladie, či po stránke fyzickej alebo intelektuálnej. V súčasnosti enormne narastá množstvo najrôznejších informácií, vrátane rôznych filmov, a fyzikálne poznanie nám umožňuje tieto informácie kriticky hodnotiť a zaujímať kvalifikované postoje. Pre fyzikálne poznanie je primárna otázka *prečo*, až potom nasleduje otázka *ako*. Pri hodnotení akéhokoľvek javu, fyzikálneho, ekonomického, či spoločenského je dôležité poznať *príčiny*, ktoré vedú k pozorovaným *dôsledkom*. Základným zákonom, ktorý stojí za každým pozorovaným javom je *zákon kauzality – príčinnosti*. Fyzika sa usiluje nachádzať prejav tohto zákona za každým pozorovaným javom.

Fyzika je experimentálna veda – zdrojom informácií je pozorovanie rôznych javov. Získavanie informácií umožňuje priame pozorovanie prostredníctvom zmyslového vnímania alebo pozorovanie pomocou najrôznejších technických prostriedkov – prístrojov, ktoré jav nedostupný priamo našim zmyslom prevádzajú prejav našim zmyslom dostupný, napr. elektrický prúd nevidíme, ale údaj ampérmetra vieme prečítať, alebo mikroorganizmy nevidíme, ale pomocou mikroskopu pozorovať môžeme.

Na základe pozorovania si vytvárame modely pozorovaných javov, ktoré obsahujú našu predstavu o reťazci poznatkov od prvej príčiny až po pozorované dôsledky. Aby sme si mohli svoje predstavy vymieňať, musíme vytvoriť spoločný *jazyk*. Jednotlivým javom priradzujeme určité symboly – *fyzikálne veličiny* a ich vzťahy formulujeme *matematickými metódami*. K pozorovaným javom tak vytvárame matematicko-fyzikálny model, ktorý daný jav čo najlepšie vystihuje pozdĺž celého reťazca od príčin až po dôsledky. Matematické modelovanie a práca s týmito modelmi predstavujú *teóriu*. Teória umožňuje predpovedať výsledky javov aj nad rámec priameho pozorovania a navrhovať nové experimenty potvrdzujúce ich správnosť. Až po zvládnutí tohto jazyka, čo je pre niekoho práčne a nezáživné, môžeme začať s okolitým svetom a jeho prejavmi *konverzovať*, a to už je oveľa zaujímavejšie. Najväčšie potešenie potom prináša *objavovanie* nových súvislostí, objavovanie neznámeho.

Fyzikálna teória je určitý *jazyk*, a tak ako i u iných jazykov obsahuje *slovník* (súbor fyzikálnych veličín) a *gramatiku* (fyzikálne vzťahy, rovnice a pravidlá ich riešenia).

Pre efektívnu fyzikálnu prácu sú *potrebné zručnosti* v získavaní informácií (meraní) a *vedomosti* pre prácu s matematickými modelmi (teória). A tie sa nedajú získať ináč ako štúdiom. Aby nebola výučba fyziky iba suchopárnym učením poučiek, ako drobné čerešničky na torte sú experimenty a zaujímavé príklady. A práve takýmto príkladom sa venuje táto kniha – ide o to, aby sme si stále uvedomovali, že fyzika nie samoúčelné trápenie študentov, ale nástroj na chápanie podstaty javov, ktoré nás obklopujú a ktoré spoluutvárajú náš život. Človek bol svojom narodení obdarený rozumom a je na nás, ako tento dar využijeme. Najkrajšia cesta životom je *cesta poznania*.

1.1 Fyzikálne pojmy a veličiny

Pri pozorovaní okolitého sveta si všímame rôzne objekty a rozmanité prejavy. Na pochopenie dejov, ktoré pozorujeme, označujeme jednotlivé objekty a javy slovným vyjadrením – **pojmi**, napr. „je mi teplo“, „je tu málo svetla“, je to ťažké“, a pod. Aby sa dalo vyjadriť *ako teplo, koľko svetla, ako veľmi ťažké*“, a pod., musíme k pojmom priradiť presne definovanú **fyzikálnu veličinu**, ktorej môžeme priradiť číselnú hodnotu – kvantitatívnu mieru, na základe porovnávania s mierou tejto veličiny u dohodnutého telesa – etalónu, alebo dohodnutého deja, ktoré definujú **jednotku danej veličiny**. Číselná hodnota veličiny bez jednotky (etalónu s ktorým porovnávame) nemá zmysel.

Fyzikálnu veličinu označujeme vhodným **symbolom** (zvyčajne dohodnutým písmenom). Fyzikálna veličina je určená **číselnou hodnotou a jednotkou**. Napr. pre dráhu používame označenie s a meriame ju v metroch, napr. $s = 10 \text{ m}$.

Niektoré fyzikálne veličiny sú určené jednou hodnotou, napr. dĺžka, hmotnosť, teplota, ... a predstavujú **fyzikálne veličiny skalárne**. Iné veličiny sú dané viacerými hodnotami (zvyčajne veličiny určené nielen veľkosťou ale i smerom), napr. rýchlosť, hybnosť, sila, ... a predstavujú **fyzikálne veličiny vektorové**. Fyzikálne veličiny sa označujú *skloneným písmom* – *kurzívou*, sklárne *jednoduchým*, vektorové *tučným*.

Pri písaní rukou sa vektorové veličiny označujú príslušným symbolom s šípkou, napr. $\vec{v}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$, a pod.

Okrem toho pomer hodnôt veličín s rovnakou jednotkou sa nazýva **faktor** (napr. faktor trenia), v prípade nerovnakých jednotiek **koeficient** (napr. koeficient tlmenia kmitov). **Látková konštanta** má pre danú látku vždy rovnakú hodnotu (napr. počet elektrónov v atóme), **univerzálna konštanta** má vždy rovnakú hodnotu (napr. rýchlosť svetla vo vákuu, molárna konštanta, elementárny náboj, ...).

Matematické konštanty (napr. π – Ludolfovo číslo, e – Eulerovo číslo (základ prirodzených logaritmov), $i = \sqrt{-1}$ – imaginárna jednotka, a pod.) sa píše jednoduchým stojatým písmom. Podobne ustálené označenia operácií a funkcií sa píše stojatým písmom (napr. $\sin$, $\cos$, $\tan$, $f(x)$, Δ – zmena, d – elementárna zmena). *Pozn.*: Napr. $d\vec{r}$ je elementárne posunutie (zmena polohového vektora, ale ds je elementárny úsek dráhy (nie zmena), podobne dE_k je zmena kinetickej energie, ale dW je elementárna vykonaná práca. V ručne písanom texte sa tieto pravidlá taj dôsledne nedodržia.

1.1.1 Číselná hodnota fyzikálnej veličiny

Mieru danej veličiny určuje číselná hodnota, ktorá sa zadáva číslom. Číselná hodnota zároveň udáva presnosť danej hodnoty. Presnosť určuje počet platných číslic (číslíc za prvou nenulovou číslicou, napr. 1,00; 1,25; 0,126; 0,00251; $1,48 \times 10^6$ sú čísla s tromi platnými číslicami. Keďže číslo 1 dostávame zaokrúhlením čísiel (0,5 ; 1,5), t.j. $1 \pm 0,5$, presnosť hodnoty 1 je 50 %.

Naproti tomu hodnota 1,00 vzniká zaokrúhlením čísiel (0,995 ; 1,005), t.j. $1,00 \pm 0,005$, a tak presnosť hodnoty 1,00 je 0,5 %. Hodnoty fyzikálnych veličín 1 a 1,00 sa významne líšia svojou presnosťou. Naopak, ak použijeme na určenie elektrického odporu rezistora $R = U/I$ multimeter a zmeriame napätie na rezistore $U = 2,65 \text{ V}$ a prúd rezistora $I = 0,23 \text{ A}$, po dosadení do kalkulačky dostávame $R = 11,521\,739 \, \Omega$. Táto hodnota by zodpovedala presnosti 10^{-7} , čo je nezmysel. Nepresným meraním nemôžeme dostať výsledky s vyššou presnosťou. Výsledok preto treba zaokrúhliť na počet platných číslic menej presnej veličiny, t.j. na dve platné číslice podľa presnosti merania prúdu, takže $R \approx 12 \, \Omega$. Takže **pozor na správne zaokrúhlenie výsledku**.

1.1.2 Jednotky fyzikálnych veličín

Hodnoty fyzikálnych veličín určujeme porovnávaním s dohodnutým normálom – jednotkou. Najprv sa musíme dohodnúť na jednotke času, napr. 1 deň pomocou striedania dňa a noci, a potom môžeme merať čas deja v počte dní. Podobne sa dohodneme na jednotke dĺžky 1 lakeť pomocou dĺžky ruky, a potom môžeme merať dĺžku látky v lakťoch. Aby boli výsledky meraní jednoznačné, musí existovať široká dohoda o definícii jednotiek.

Ukazuje sa, že na úrovni dnešného poznania a z praktického hľadiska stačí precízne definovať sedem základných jednotiek. Medzinárodná dohoda uplatňovaná po celom svete – *Système International des Unités* (skratka SI), je založená na definícii **základných jednotiek**:

1. 1 meter (1 m) – jednotka dĺžky
2. 1 sekunda (1 s) – jednotka času
3. 1 kilogram (1 kg) – jednotka hmotnosti
4. 1 ampér (1 A) – jednotka elektrického prúdu
5. 1 kelvin (1 K) – jednotka termodynamickkej teploty
6. 1 mol (1 mol) – jednotka látkového množstva
7. 1 kandela (1 cd) – jednotka svietivosti

Definície základných jednotiek sústavy SI možno nájsť v učebniciach alebo na internete.

Sústava základných jednotiek je doplnená dvomi **doplňkovými jednotkami**

- 1 radián (1 rad) – jednotka rovinného uhlu
- 1 steradián (1 sr) – jednotka priestorového uhlu

Jednotky zvyšných fyzikálnych veličín možno odvodiť od jednotiek základných veličín pomocou ich definičných vzťahom a predstavujú **jednotky odvodené**, napr.

$$1 \frac{m}{s} \text{ – jednotka rýchlosti pohybu odvodená zo vzťahu } v = \frac{s}{t}$$

$$1 \text{ N (newton)} = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2} \text{ – jednotka sily odvodená zo vzťahu } F = m a.$$

Pozn. 1: Jednotka definovaná s najväčšou presnosťou (až 10^{-8}) je jednotka času – 1 s.

Pozn. 2: Pri všeobecnom riešení úloh je vhodná jednotková kontrola, ktorá prípadne upozorní na chybu vo výslednej formule. Hodnoty veličín dosadzujeme i s jednotkami a postupnou úpravou určíme jednotku výsledku a overíme jej platnosť pre vypočítanú veličinu.

1.2 Meranie hodnôt fyzikálnych veličín

Hodnoty fyzikálnych veličín určujeme meraním. Meranie spočíva v porovnávaní daného telesa alebo deja s telesom alebo dejom referenčným – etalónom. **Priame meranie** sa používa napr. pri meraní dĺžky – etalónom je stupnica meradla, alebo času – etalónom je stupnica na stopkách, alebo hmotnosti – etalónom je závažie.

Niekedy sa uskutočňuje **nepriame meranie** na základe merania iných veličín, z ktorých sa potom meraná veličina vypočíta, napr. meranie elektrického odporu pomocou merania napätia a prúdu.

Na čo najpresnejšie meranie hodnôt veličín sa využívajú rôzne technické prostriedky, ktoré predstavujú meracie prístroje alebo špeciálne meracie metódy. Napr. pre meranie veľmi malých rozmerov sa použije optický alebo elektrónový mikroskop, prípadne sa využíva metóda difrakcie svetla. Rýchlosť pohybu možno merať tak, že zmeriame dráhu a čas pohybu a výpočtom určíme rýchlosť. Existujú však špeciálne prístroje – tachometre, ktoré merajú rýchlosť priamo. Teplota sa

meria napr. pomocou prenosu tepla medzi telesom a dohodnutými teplotnými bodmi, čo je však nepraktické – v praxi sa využíva nepriama metóda merania teploty teplomermi, využívajúcimi rôzne teplotne závislé deje, napr. teplotná rozťažnosť kvapalín (ortuťový teplomer), teplotná závislosť elektrického odporu (odporové teplomery) alebo tepelné vyžarovanie telies (bezkontaktné infračervené teplomery).

V súčasnosti sa stále viac nahrádzajú prístroje so stupnicou digitálnymi prístrojmi, ktoré vyhodnocujú meranie priamo na digitálnom displeji, napr. multimeter, digitálny teplomer, digitálne stopky, atď. Veľa možností poskytujú aj aplikácie inštalované v mobilnom telefóne, napr. meranie rýchlosti pomocou GPS, meranie intenzity svetla, meranie frekvencie zvuku a pod.

Problematikou merania hodnôt fyzikálnych veličín sa zaoberá odbor *metrológia*.

1.2.1 Presnosť merania hodnôt fyzikálnych veličín

Pri meraní je okrem získania hodnoty veličiny dôležitá i presnosť merania. Presnosť udáva, do akej miery sa podarilo meranou hodnotu priblížiť hodnote skutočnej. Pri každom meraní sa vyskytujú **chyby merania**, takže skutočnú hodnotu meraním nezistíme, ale môžeme sa jej priblížiť. Po vyhodnotení chýb určujeme **neistotu**, ktorá udáva mieru priblíženia výsledku merania k skutočnej hodnote.

Chyby sú dvojakého charakteru: chyby náhodné a chyby systematické.

Systematická chyba je daná samotným meradlom. Napr. stupnica prístroja je nepresne ociahovaná, údaj ručičkového prístroja je ovplyvnený vnútorným trením, stopky (hodinky) majú nepresne nastavenú frekvenciu oscilátora a pod. Pri odčítaní hodnoty meranej veličiny zo stupnice meradla je chyba rovná presnosti, s akou sme schopný odčítať hodnotu medzi dvomi ryskami stupnice (zhruba $\frac{1}{2}$ rozdielu dielikov, ale nie menej ako $\frac{1}{10}$ tohto rozdielu). V prípade digitálnych meradiel je to hodnota $\frac{1}{2}$ najnižšej číslice displeja. Systematickú chybu udáva zvyčajne výrobca prístroja. Systematickú chybu nemôžeme meraním ovplyvniť.

Náhodná chyba vzniká nepresnosťou odčítania meranej hodnoty, napr. nepresnosťou odčítania zo stupnice meradla. Náhodná chyba má štatistický charakter a podľa spôsobu merania podlieha rôznym rozdeleniam pravdepodobnosti. Najčastejším prípadom je Gaussovo (normálne) rozdelenie, ktoré má maximálnu hodnotu v presnej hodnote veličiny a s narastajúcou odchýlkou rýchlo klesá.

Náhodnú chybu redukuje opakovaním merania. Dôležité je pritom, že opakované meranie sa uskutočňuje za rovnakých podmienok. Výsledkom je potom najpravdepodobnejšia hodnota veličiny, ktorou je *aritmetický priemer (stredná hodnota)*

$$(1.1) \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ,$$

kde x_i sú opakovaným meraním získané hodnoty a N počet opakovaných meraní danej veličiny.

Aritmetický priemer je s ohľadom na náhodnú chybu najpravdepodobnejšia hodnota meranej veličiny.

Jednotlivé namerané hodnoty sú rozložené okolo aritmetického priemeru.

Odchýlka nameranej hodnoty od aritmetického priemeru

$$(1.2) \quad \Delta x_i = x_i - \bar{x} , \text{ pričom } \sum_{i=1}^N \Delta x_i = 0 .$$

Zaujímá nás, do akej miery sa môžeme na získanú strednú hodnotu spoľahnúť. Z teórie štatistiky vyplýva, že odchýlky Δx_i sa spočítavajú kvadraticky.

V prípade obmedzeného počtu meraní (napr. 10, 25 a pod.) sa určuje *smerodajná odchýlka* (niekedy – *stredná kvadratická odchýlka*, *štandardná odchýlka*) jednotlivého merania od správnej hodnoty vzťahom

$$(1.3) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2}{N-1}}.$$

Vidíme, že ku kvadratickému súčtu prispievajú rovnako kladné aj záporné odchýlky.

Nás ale zaujíma, ako sa štatisticky líši stredná hodnota od presnej hodnoty. Zo štatistickej teórie vyplýva, že *smerodajná odchýlka strednej hodnoty* od správnej hodnoty je daná vzťahom

$$(1.4) \quad s_N = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2}{N(N-1)}}.$$

Z teórie Gaussovho rozdelenia vyplýva, že v intervale $\bar{x} \pm s_N$ sa nachádza presná hodnota s pravdepodobnosťou 68 %, v intervale $\bar{x} \pm 2s_N$ s pravdepodobnosťou 99 %.

Niekedy sa smerodajná odchýlka nahrádza priemernou (kvadratickou) odchýlkou

$$(1.5) \quad s_N^* = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2}}{N}, \text{ prípadne } s_N' = \frac{\sum_{i=1}^N |\Delta x_i|}{N}$$

ktorá má hodnotu mierne odlišnú od s_N .

Celková neistota sa skladá z neistoty systematickej a neistoty náhodnej

$$(1.6) \quad s_x = \sqrt{s_{\text{syst}}^2 + s_N^2}.$$

Výsledok potom udávame v tvare

$$(1.7) \quad \boxed{x = \bar{x} \pm s_x}.$$

Neistoty sú absolútne alebo relatívne.

Absolútna neistota s_x má fyzikálny rozmer meranej veličiny.

Relatívna neistota je pomer absolútnej neistoty a strednej hodnoty veličiny

$$(1.8) \quad \delta_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.$$

Relatívna neistota má rozmer 1 a udáva sa v percentách.

Vypočítaná hodnota a neistota vypočítanej hodnoty.

Pri nepriamych meraniach určujeme výslednú hodnotu výpočtom podľa príslušného vzťahu.

Výsledná veličina u je daná funkciou veličín $x, y, z, \dots$

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

Výslednú hodnotu vypočítanej veličiny dostaneme po dosadení stredných hodnôt nameraných veličín do daného vzťahu

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots).$$

Výslednú hodnotu neistoty dostaneme ako kvadratický súčet parciálnych neistôt (jednotlivých meraných veličín)

$$(1.9) \quad s_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} s_z\right)^2 + \dots},$$

kde výrazy typu $\frac{\partial f}{\partial x}$ predstavujú parciálne derivácie funkcie f podľa príslušných premenných.

V praxi ale môžeme použiť zjednodušený postup:

- neistota súčtu alebo rozdielu veličín je rovná súčtu ich absolútnych neistôt

$$(1.10) \quad x \pm y = (\bar{x} \pm \bar{y}) \pm (s_x + s_y)$$

- relatívna neistota súčinu alebo podielu veličín je rovná súčtu ich relatívnych neistôt

$$(1.11) \quad x y = \bar{x} \bar{y} \pm \delta_{xy}, \text{ resp. } \frac{x}{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \pm \delta_{xy}, \text{ kde pre oba prípady } \delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

- relatívna neistota mocniny veličiny je rovná relatívnej neistote veličiny násobenej mocniteľom (aj v prípade mocniteľov menších ako jedna – odmocniny)

$$(1.12) \quad x^a y^b = \bar{x}^a \bar{y}^b \pm s, \text{ kde } s = (\bar{x}^a \bar{y}^b) (a \delta_x + b \delta_y).$$

Pozn.: Ak vzťah obsahuje súčty (rozdiely) a súčiny (podieľy a mocniny), neistota sa počíta postupne v poradí, v akom sa vykonáva výpočet.

1.3 Riešenie fyzikálnych úloh

K riešeniu fyzikálnych úloh každý pristupuje vlastnou originálnou metódou. Existujú však určité odporúčania, ktoré je rozumné zobrať do úvahy.

1. Úlohy sú zadané formou textu, v ktorom sú uvedené dôležité východiská a cieľ riešenia. Texty bývajú niekedy obohatené o uvedenie širších súvislostí, ktoré odkazujú na isté historické fakty, poznatky modernej vedy a techniky, alebo na situáciu, do ktorej sa môže človek v bežnom živote dostať.
2. Prvým krokom je pozorné prečítanie textu úlohy a premyslenie opisovanej situácie. Dôležité pre riešenie je pochopiť o čo ide, najmä príčinné súvislosti a ako vzťah príčinou a následkom funguje. Tomu sa vraví *čítať s porozumením*.
3. Z textu úlohy vybrať údaje, ktoré sú pre riešenie úlohy podstatné. V úvode riešenia je vhodné príslušné údaje vybrať, označiť príslušné veličiny vhodnými symbolmi a uviesť ich numerické hodnoty vybrané z textu zadania. Niekedy nie sú veličiny priamo zadané, ale možno ich získať z tabuliek alebo z internetu, napr. aký objem má železná činka s hmotnosťou 5 kg? – potrebujete hustotu železa, ale nie je zadaná – v texte je ale dôležitá informácia, že ide o železo, hustotu si už vyhľadáme v tabuľkách.
4. Vzájomné súvislosti zistené zo zadania sa zobrazujú formou fyzikálnych zákonov, rovníc a vzťahov. Uvedomte si tieto vzťahy a postupne ich aplikujte počas riešenia úlohy.
5. Úlohy riešte vždy najprv všeobecne s použitím symbolov veličín s použitím matematických metód. Pre zobrazenie závislosti výsledku od zadaných veličín je vhodné vyjadriť výsledok pomocou iba zadaných veličín. Ak vo výsledku použijeme priebežne odvodené veličiny, priama závislosť výsledku od primárnych veličín sa vytráca.

6. Niekedy by však bol výsledný vzťah veľmi rozsiahly, a vtedy je účelné použiť približne odvodené veličiny namiesto zložitých vzťahov, ktorými sú vyjadrené.
7. Ak sa požaduje číselný výsledok, dosadzujeme zadané číselné hodnoty do výsledného všeobecného vzťahu. Do vzťahu dosadzujeme hodnoty veličín i s jednotkami a urobíme jednotkovú kontrolu. Práve jednotková kontrola môže upozorniť na chybu vo výslednom vzťahu.
8. Pri číselnom výpočte si uvedomte, že fyzika a technika **nepoznajú presné hodnoty**. Aj keď sa chyba hodnôt zadaných veličín priamo neuvádza, nepriamo je daná počtom platných číslic (pri násobení a delení), prípadne počtom desatinných miest (pri sčítaní a odčítaní), ako bolo už povedané v ods. 1.2.1. Napr. nie je správne $2,5 \text{ m} \times 8,7 \text{ m} = 21,75 \text{ m}^2$, správne $\approx 21,8 \text{ m}^2$, alebo nemá zmysel súčet $1 \text{ m} + 1 \text{ mm}$, tzn. $1 \text{ m} + 0,001 \text{ m} \neq 1,001 \text{ m}$ lebo čísla nemajú rovnakú neurčitost' (ak u prvého čísla negarantujeme ani desatinu, nemôžeme hovoriť o tisícinách – správne $1000 \text{ mm} + 1 \text{ mm} = 1\,001 \text{ mm}$, lebo z hľadiska neurčitosti $1 \text{ m} \neq 1000 \text{ mm}$, ale správne $1,000 \text{ m} = 1\,000 \text{ mm}$).
9. Výsledok treba s ohľadom na neurčitost' správne zaokrúhľovať!
Z toho vyplýva aj to, že priebežným vyčísľovaním medzivýsledkov a ich zaokrúhľovaním narastá neurčitost' konečného výsledku. Ak už treba používať číselné medzivýsledky, potom treba ich nezaokrúhlené hodnoty uložiť do pamäti kalkulačky a v ďalších výpočtoch používať tieto nezaokrúhlené hodnoty.
10. Ak dodržíte pravidlá o neurčitosti výsledku, vyjadríte výslednú hodnotu znamienkom rovnosti (=) s tým, že neurčitost' výsledku je daná počtom platných číslic. Ak chceme zdôrazniť, že výsledok je približný, možno použiť znamienko ($\approx$)

1.4 Stručný prehľad základných matematických postupov pri riešení fyzikálnych úloh

Fyzikálne zákony a vzťahy sú formulované matematicky vzťahmi a rovnicami obsahujúcimi symboly fyzikálnych veličín. Úpravami vzťahov a riešením rovníc potom získavame matematický obraz nových súvislostí a výsledky riešení. Popri experimente predstavuje matematika dôležitý nástroj fyziky a rozvíjania fyzikálneho poznania.

Spracovanie fyzikálnych vzťahov a rovníc s použitím symbolov veličín predstavuje **všeobecné riešenie**.

Ak za symboly fyzikálnych veličín dosadíme ich hodnoty, dostaneme riešenie pre daný konkrétny prípad, ale vytratia sa súvislosti, takže z numerického výsledku nemožno robiť závery o vplyve jednotlivých veličín na výsledok.

Pri riešení úlohy postupujeme najprv všeobecným riešením až po všeobecný výsledok, v ktorom vidíme vplyv jednotlivých veličín. Až potom do všeobecného výsledku dosadíme číselné hodnoty, pričom dávame pozor na správne jednotky veličín. Úpravou jednotiek veličín vo výslednom vzťahu sa presvedčíme o tom, že výsledok má správnu jednotku.

1.4.1 Matematické funkcie

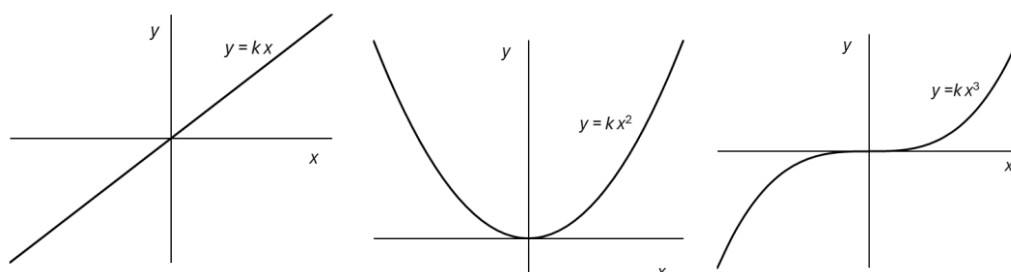
Fyzikálne vzťahy sa vyjadrujú vo forme matematických funkcií. Premennými týchto funkcií sú fyzikálne veličiny. Aby nás matematické spracovanie neodvádzalo od fyzikálnych úvah, je potrebné osvojiť si tento matematický „nástroj“ tak, aby nepredstavoval jadro problému. Je teda potrebné dôkladne poznať základné matematické funkcie, ich grafické priebehy a základné vlastnosti.

Ďalej uvádzame niektoré často sa vyskytujúce funkcie:

- funkcia lineárna a mocninová

$$y = a + bx, \quad y = a + bx + cx^2, \quad y = a + bx + cx^2 + dx^3, \dots$$

Na obr. 1.2 sú znázornené jednoduché mocninové funkcie. Môžeme si všimnúť:

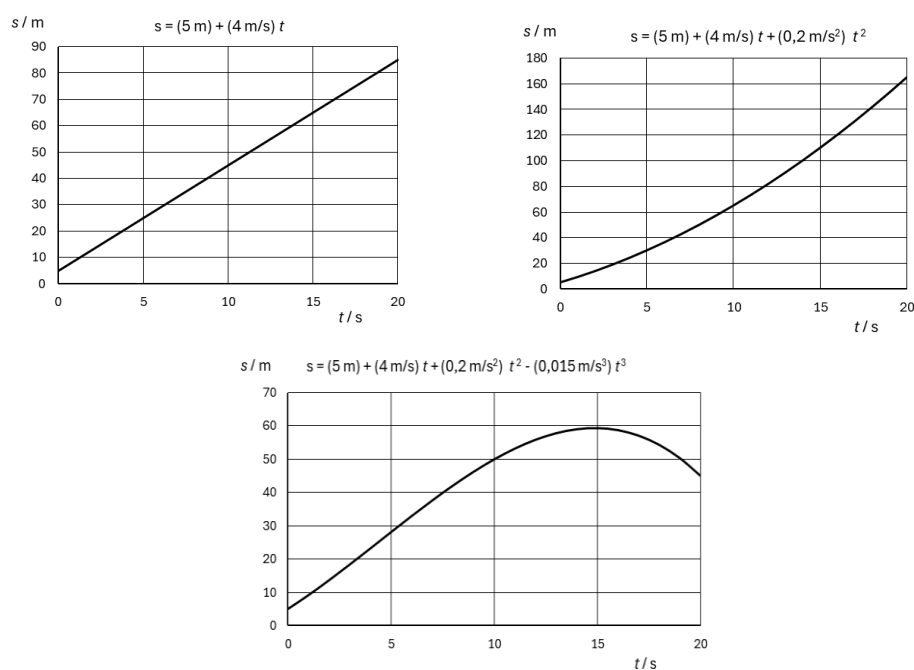


Obr. 1.2 Jednoduché mocninové funkcie

- lineárna funkcia opisuje strmosť funkcie – gradient, strmosť udáva konštanta k , pre $k > 0$ je funkcia rastúca, pre $k < 0$ klesajúca
- kvadratická funkcia opisuje zakrivenie symetrické – pre $k > 0$ má minimum, pre $k < 0$ maximum
- kubická funkcia opisuje nesymetriu, pre $k > 0$ napravo od inflexného bodu ($x = 0$) je kladná, naľavo od neho záporná; pre $k < 0$ je to opačne.

- funkcie polynomicke sú kombináciou mocninových členov

Na obr. 1.3 sú príklady grafov polynómov prvého, druhého a tretieho stupňa



Obr. 1.3 Príklady grafov polynómov prvého, druhého a tretieho stupňa

- funkcie goniometrické (ak je argumentom uhol) a harmonické (ak je argumentom fáza) – $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

Pre tieto funkcie sú užitočné vzťahy

$$(1.13) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(1.14) \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$(1.15) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(1.16) \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$(1.17) \quad \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}, \quad \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$(1.18) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$(1.19) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \beta \sin \alpha$$

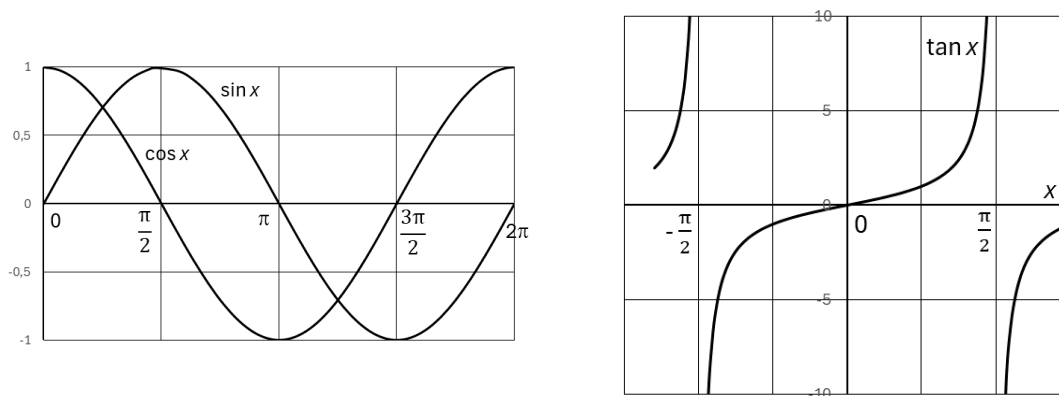
$$(1.20) \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(1.21) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(1.22) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(1.23) \quad \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \text{ atď.}$$

Ďalšie užitočné vety sú Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta.



Obr. 1.4 Grafy goniometrických funkcií $\sin x$, $\cos x$ a $\tan x$

- funkcie cyklometrické

(funkcia $v = v_m \arctan(at)$ sa vyskytuje vo výpočte rýchlosti pádu telesa za účinku turbulentného odporu vzduchu)

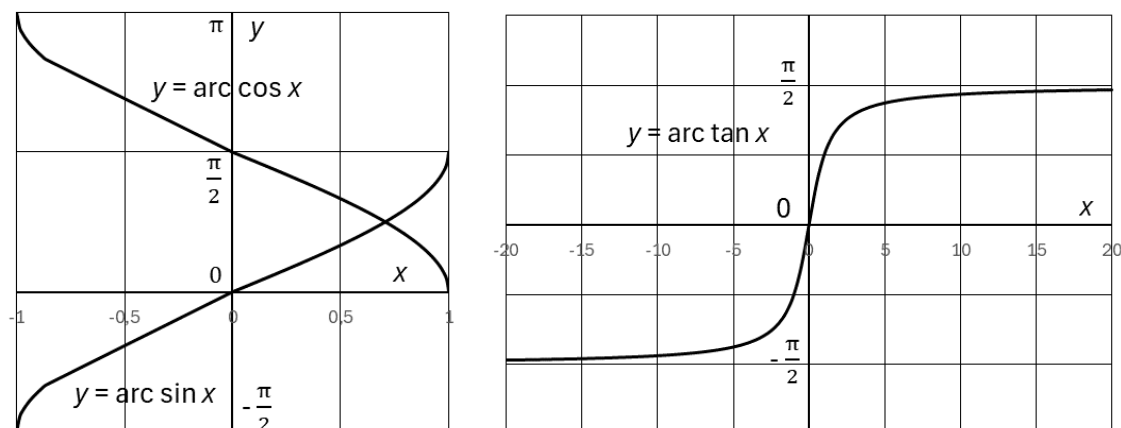
cyklometrické funkcie sú inverzné funkcie k funkciám goniometrickým (označenie arc)

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$

udávajú argument (uhol, fázu) zodpovedajúcu hodnote príslušnej goniometrickej funkcie.

$\arcsin(\sin x) = x$, resp. $\sin(\arcsin x) = x$ atď.

Na obr. 1.5 sú grafy základných cyklometrických funkcií



Obr. 1.5 Grafy cyklometrických funkcií $\arcsin x$, $\arccos x$ a $\arctan x$

Pozn.: cyklometrické funkcie sú na kalkulačke zvyčajne označené

$\arcsin x \rightarrow \sin^{-1} x$, $\arccos x \rightarrow \cos^{-1} x$, $\arctan x \rightarrow \tan^{-1} x$ (nejedná sa tu o mocninu na -1)

- funkcie hyperbolické

(hyperbolická funkcia $\cosh x$ sa vyskytuje pri výpočte tvaru zavesenej reťaze – preto sa volá reťazovka)

Hyperbolické funkcie sú definované vzťahmi

$$(1.24) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Grafy základných hyperbolických funkcií sú na obr. 1.6.

Pre hyperbolické funkcie platia vzťahy

$$(1.25) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

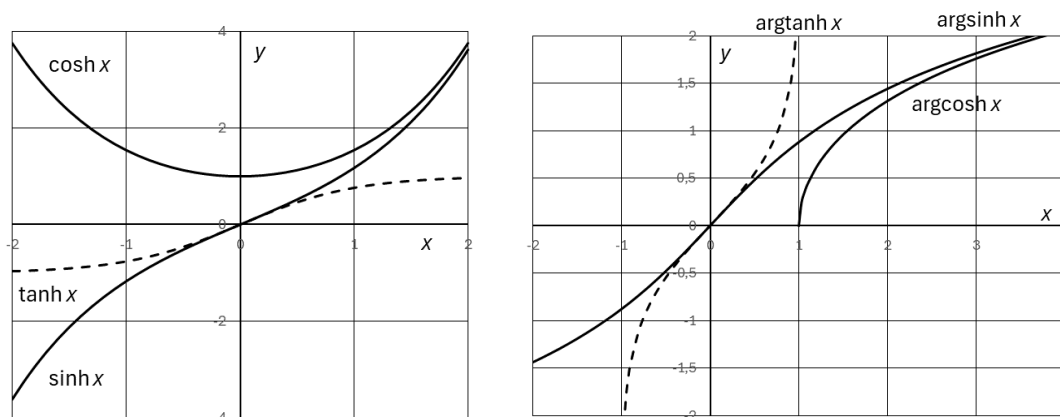
$$(1.26) \quad \sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}, \quad \cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

- funkcie hyperbolometrické

Hyperbolometrické funkcie sú inverznými funkciami k funkciám hyperbolickým

$y = \operatorname{arsinh} x$, $y = \operatorname{arcosh} x$, $y = \operatorname{artanh} x$.

Grafy hyperbolických a hyperbolometrických funkcií sú na obr. 1. 6



Obr. 1.6 Grafy hyperbolických a hyperbolometrických funkcií

Ako vidno v grafe, hyperbolické funkcie sú definované na množine $(-\infty, \infty)$.

Funkcia $\arg \sinh x$ má definičný obor $(-\infty, \infty)$, $\arg \cosh x$ obor $(1, \infty)$ a $\arg \tanh x$ obor $(-1, 1)$.

Pozn.: Na kalkulačke hyperbolometrické funkcie nájdeme zvyčajne pod tlačidlom hyp a ďalej

$\arg \sinh x \rightarrow \sinh^{-1} x$, $\arg \cosh x \rightarrow \cosh^{-1} x$, $\arg \tanh^{-1} x \rightarrow \tanh^{-1} x$ (nejde tu o mocninu na -1)

- Funkcie exponenciálne a logaritmické

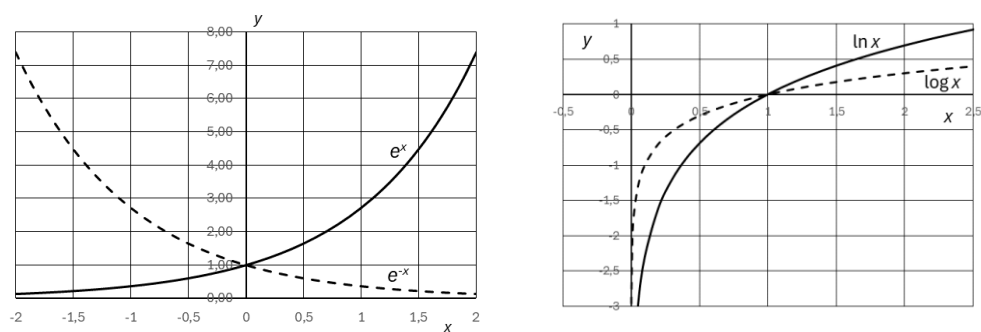
Exponenciálna funkcia má tvar a^x , špeciálne e^x ($e \approx 2,718$ – Eulerovo číslo).

Inverzná funkcia je logaritmus $\log_a x$ (logaritmus x pri základe a), špeciálne $\log x$ (logaritmus pri základe 10 – dekadický logaritmus), $\ln x$ (logaritmus pri základe e – prirodzený logaritmus), obr. 1.7.

Niektoré vzťahy:

$$(1.27) \quad \log_a a^x = x, \quad e^{kx} = k e^x, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(1.28) \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln e^{kx} = kx.$$



Obr. 1.7 Grafy exponenciálnej funkcie a prirodzeného a dekadického logaritmu

Ako vidíme, logaritmické funkcie sú definované iba pre $x > 0$.

- Pozn. 1: Všetky uvedené funkcie sú vo vedeckej kalkulačke. Je vhodné sa podrobne oboznámiť s možnosťami, ktoré kalkulačka poskytuje.
- Pozn. 2: Na kreslenie grafov, numerické riešenie rovníc, štatistické výpočty a pod. sa s výhodou využíva tabuľkový editor EXCEL.

1.4.2 Skalárne a vektorové veličiny

Fyzikálne veličiny sú dané jednou alebo viacerými hodnotami.

Skalárne veličiny – sú veličiny, ktoré sú určené jedinou hodnotou so zodpovedajúcou jednotkou nezávisle od posunutia časovej osi a posunutia, prípadne natočenia, súradnicovej sústavy. Príkladom je hmotnosť telesa.

Vektorové veličiny – sú veličiny, ktoré sú určené jednou alebo viacerými hodnotami so zodpovedajúcou jednotkou, ktoré závisia od posunutia alebo natočenia súradnicovej sústavy. Počet zložiek vektorovej veličiny je daný rozmerom (dimenziou) priestoru, napr. v bežnom 3D – trojrozmernom priestore majú vektory tri zložky. Ak riešime pohyb po priamke, dej sa odohráva z hľadiska opisu v jednorozmernom priestore, a teda vektorová veličina je zadaná iba jednou hodnotou, napr. vektor rýchlosti priamočiareho pohybu. Na druhej strane existuje napr. fázový priestor so súradnicami x, y, z, p_x, p_y, p_z (polohy a hybnosti častice), ktorý je 6-rozmerný.

Tenzorové veličiny – sú veličiny zadané maticou hodnôt. Väčšinou ide o transformáciu jedného vektorového poľa na iné, keď dochádza k zmene smeru vektora, napr. vzťah vektora $\mathbf{D}$ elektrickej indukcie a vektora $\mathbf{E}$ elektrickej intenzity: $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$ v anizotropnom prostredí, kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor (matica 3×3) permitivity – v takom prostredí nemajú vektory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ rovnaký smer a násobenie tenzorom mení nielen veľkosť ale i smer vektora (v izotropnom prostredí sa tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$ zredukuje na jedinú hodnotu ε – elektrickú permitivitu prostredia, pričom vektory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ majú smer rovnaký).

Pravidlá počítania s 3D vektormi

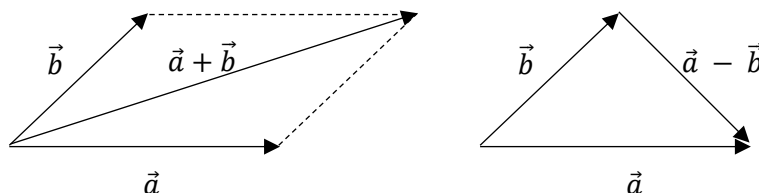
Sčítanie a odčítanie vektorov

Ak je vektor zadaný v algebrickom (zložkovom) tvare, sčítajú (odčítajú) sa jednotlivé zložky

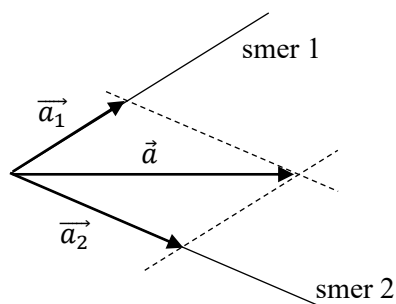
$$(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \pm (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = (a_1 \pm b_1) \vec{i} + (a_2 \pm b_2) \vec{j} + (a_3 \pm b_3) \vec{k},$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smere jednotlivých osí.

Grafické sčítanie – odčítanie 2D vektorov



Často potrebujeme 2D vektor $\vec{a}$ rozložiť na zložky v predpísaných smeroch 1 a 2



Násobenie vektorov

Definované sú dva súčiny – skalárny súčin a vektorový súčin

Skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sa označuje bodkou, prípadne sa bodka vynechá, výsledkom je skalár.

Výsledok má tvar $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \varphi$,

kde a , b sú veľkosti vektorov a φ je uhol, ktorý vektory zvierajú.

Skalárny súčin je komutatívny $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Ak sú vektory dané ortogonálnymi (navzájom kolmými) zložkami, vyjadríme skalárny súčin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Skalárnym súčinom možno určovať priemet vektora do stanoveného smeru, napr. smeru $\vec{i}$ jednotkovým vektorom $\vec{i}$

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}.$$

Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ sa označuje znamienkom $\times$. Výsledkom je vektor $\vec{c}$, ktorý má smer kolmý na obidva vektory, pričom vektory v poradí $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tvoria pravotočivú trojicu (pomôcka: prvé tri prsty pravej ruky), a veľkosť je

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \varphi.$$

Vektorový súčin nie je komutatívny, pri zmene poradia vektorov sa mení znamienko súčinu a výsledný vektor má opačný smer

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Ak sú vektory zadané ortogonálnymi zložkami, možno vektorový súčin vyjadriť

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Užitočné vzťahy

$$\text{Dvojnásobný súčin skalárny} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\text{Dvojnásobný súčin vektorový} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{Dvojnásobný súčin zmiešaný} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Pozn.: V tlačенých textoch sa vektory označujú tučným písmom $\vec{a} \equiv \mathbf{a}$, označenie šípkou sa používa v ručne písaných textoch.

1.4.3 Derivácie

Fyzika pojednáva o dejoch, ktoré sa odohrávajú vo svete. Každý dej je postupnosť po sebe nasledujúcich zmien stavu pozorovaného objektu. Deje zobrazujeme pomocou zmeny stavových fyzikálnych veličín, ktoré daný dej opisujú. Zmena stavovej veličiny je opísaná funkciou závislou od času. Pri každej zmene nás zaujíma, ako rýchlo zmena prebieha a aká je celková zmena stavovej veličiny v danom časovom intervale.

Uvažujme stavovú veličinu x , ktorá sa s časom mení, pričom zmenu opisuje funkcia $x = f(t)$. Za čas Δt sa hodnota veličiny zmení o Δx . Pomer

$$(1.29) \quad y_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

udáva priemernú rýchlosť zmeny na danom časovom intervale.

Ak chceme podrobnejšie preskúmať priebeh deja, potrebujeme poznať, ako rýchlo sa mení stavová veličina v každom okamihu na danom intervale. Znamená to rozdeliť časový interval na veľmi krátke časové intervaly (okamihy), ktoré označujeme dt (interval $\Delta \rightarrow d$ elementárny interval). Za tento elementárny čas dôjde k veľmi malej (elementárnej) zmene stavovej veličiny. Rýchlosť zmeny počas tohto okamihu – **okamžitá rýchlosť**, je

$$(1.30) \quad y = \frac{dx}{dt}.$$

Podobne ako $x = f(t)$ je funkciou času, tak aj $y = g(t)$ je funkciou času, a teda

$$(1.31) \quad g(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Podobne matematika zavádza operáciu derivácie

$$(1.32) \quad g_{\text{mat}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

s tým rozdielom, že v limite $\Delta t \rightarrow 0$ sa časový interval neobmedzene blíži k nule, zatiaľ čo vo fyzikálnej úvahe zostáva interval dt veľmi malý ale konečný na úrovni merateľnosti dostupnými prístrojmi. Zatiaľ čo vzťah (1.33) definuje deriváciu funkcie $f(t)$, vzťah (1.32) stále zostáva zlomkom (pomerom konečných hodnôt). Ak je interval dt dostatočne krátky, nie je medzi okamžitou rýchlosťou zmeny a časovou deriváciou merateľný rozdiel. To nám umožňuje vo fyzike primerane využívať matematickú **teóriu derivácií**.

Rovnaký postup môžeme použiť pri iných pomeroch vzájomne súvisiacich veličín. Napr. ak sa posunieme o dx , zaznamenáme zmenu teploty dT . Výraz dT/dx predstavuje strmosť zmeny (**gradient**) teploty. Podobne ak stúpame do kopca, pri vodorovnom posunutí dx sa zmení výška o dh . Pomer dh/dx predstavuje strmosť stúpania svahu (ak je výsledok záporný, ide o strmosť klesania). Dopravná značka „nebezpečné klesanie – stúpanie“ udáva gradient vozovky v percentách (%). Iný prípad predstavuje stanovenie objemovej hmotnosti (hustoty). Priemerná hustota telesa $\rho_p = m/V$, ak nás zaujíma rozloženie hmotnosti v telese, rozdelíme teleso sa objemové elementy dV a určíme lokálnu hustotu $\rho = dm/dV$, kde dm je hmotnosť elementu dV . Nehomogenitu telesa potom opisuje pomer $d\rho/dx$ (gradient hustoty).

Pozn.: Derivácie funkcií sa skrátene označujú apostrofom $f'(x)$, s výnimkou časových derivácií, ktoré sa označujú bodkou nad veličinou, napr. $\dot{y}$. Ak sa derivácia opakuje, znamienko sa rozširuje, napr. $f''(x)$, $f'''(x)$, $\ddot{y}$, $\ddot{\ddot{y}}$.

Pre praktické využitie je vhodné poznať derivácie jednoduchých funkcií a pravidiel počítania s nimi. Deriváciu vieme pre každú funkciu určiť pomocou vzťahu (1.33). Uvedieme ukážkový príklad:

$$f(x) = kx^2 : g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(x + \Delta x)^2 - kx^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2kx + k\Delta x) = 2kx.$$

Derivovanie predstavuje matematickú operáciu a možno teda deriváciu formálne zapísať

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y,$$

kde výraz $\frac{d}{dx}$ je **operátor** derivácie (predpis, čo treba urobiť s funkciou y).

Zo zavedenia derivácie je zrejmé, že derivácia funkcie určuje smernicu dotýčnice ku grafu funkcie v danom mieste (x_0, y_0) :

$$(1.33) \quad y = k(x - x_0) + y_0, \quad \text{kde} \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Z matematiky poznáme derivácie funkcií, z ktorých uvádzame stručný prehľad najčastejšie sa vyskytujúcich funkcií

Tab. 1.1 Tabuľka vybraných funkcií a ich derivácií

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$
k	0	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	$n x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
e^x	e^x	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
e^{ax}	$a e^x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arg \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan ax$	$a \frac{1}{1+(ax)^2}$	$\arg \tanh ax$	$a \frac{1}{1-(ax)^2}$
$\ln ax$	$\frac{1}{x}$	$\ln (\cos ax)$	$-a \tan ax$	$\ln (\cosh ax)$	$a \tanh ax$

Dalšie derivácie funkcií nájdeme v príslušnej matematickej literatúre alebo na internete.

Vybrané pravidlá práce s deriváciami:

Derivácia súčtu funkcií je rovná súčtu derivácií jednotlivých funkcií

Derivácia súčinu a podielu

$$(1.34) \quad [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(1.35) \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivácia inverznej funkcie

Uvažujme funkciu $y = f(x)$ a k nej inverznú $x = f^{-1}(y) = g(y)$

Keďže „fyzikálnu deriváciu“ môžeme považovať za podiel, môžeme napísať

$$(1.36) \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)}$$

Ako príklad uvádzame:

pre $y = \ln x$, a teda $x = e^y$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$y = \arctan x$, a teda $x = \tan y$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$y = \operatorname{arctanh} x$, a teda $x = \tanh y$

$$(\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{(\tanh y)'} = \cosh^2 y = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Derivácia zloženej funkcie

Uvažujme zloženú funkciu $z = f[y(x)]$. Ak pracujeme s deriváciou ako so zlomkom, môžeme napísať

$$(1.37) \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Rovnakým postupom môžeme riešiť aj viacnásobne zloženú funkciu.

Napr.:

pre $y = k \sin(\omega t + \alpha)$, kde fáza harmonickej funkcie $\varphi = \omega t + \alpha$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = k \cos \varphi \frac{d}{dt}(\omega t + \alpha) = k \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

pre $y = e^{a \sin \omega t}$, kde $u = \omega t$, $v = a \sin u$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} = e^v (a \cos u) \omega = a \omega e^{a \sin \omega t} \cos \omega t$$

pre $y = \ln(\cos ax)$, $u = \cos ax$, $v = ax$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos ax} (-\sin ax) a = -a \tan ax$$

pre $y = \ln(\cosh ax)$, $u = \cosh ax$, $v = ax$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cosh ax} (\sinh ax) a = a \tanh ax.$$

Parciálne derivácie, gradient a úplný (totálny) diferenciál

Ak máme funkciu viacerých premenných, deriváciu robíme postupne podľa jednej z nich. Napr. teplota je funkciou polohy, a teda súradníc x, y, z : $T = f(x, y, z)$. Ak sa posunieme o dx v smere osi x , zmení sa teplota o dT_x , podobne pri posunutí o dy a dz , pričom

$$(1.38) \quad dT_x = \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} dx, \quad dT_y = \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} dy \quad \text{a} \quad dT_z = \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Derivácie podľa iba jednej premennej (pri derivovaní sa zvyšné premenné považujú za konštanty) je iba čiastočná (parciálna), preto sa taká derivácia nazýva **parciálna derivácia**. Označuje sa odlišným znamienkom derivácie ∂ .

Parciálna derivácia podľa súradnice udáva strmosť zmeny funkcie pri posúvaní v danom smere.

Napr.: Ak máme funkciu $z = ax^2 \sin y$, potom parciálne derivácie podľa premenných sú

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ax^2 \cos y.$$

Ak nás zaujíma celková zmena funkcie pri zmene oboch premenných, parciálne zmeny sčítame a dostávame zmenu úplnú – **totálny diferenciál**

$$(1.39) \quad dz = dz_x + dz_y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Ak sú premenné priestorové súradnice, musíme pri sčítaní parciálnych zmien uvažovať aj rôzne smery posunutia, napr. pre zmenu potenciálu $\varphi = \varphi(x, y, z)$ máme

$$(1.40) \quad E(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \varphi = \mathbf{grad} \varphi.$$

Takto je zavedený **operátor gradientu** $\mathbf{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$.

Veličina $\mathbf{E}$, ktorú dostaneme aplikáciou operátora gradientu, udáva smer a veľkosť najstrmšej zmeny funkcie φ , napr. ak je φ elektrický potenciál, je $\mathbf{E}$ vektor elektrickej intenzity.

Grafické a numerické derivovanie

Ak máme funkciu zadanú graficky, alebo je funkcia príliš zložitá, môžeme deriváciu určiť graficky alebo numericky.

Ak je funkcia zadaná grafom, napr. graf dráhy ako funkcia času, a chceme zistiť deriváciu, napr. graf rýchlosti, využijeme poznatok, že derivácia je smernica dotýčnice ku grafu funkcie. V jednotlivých bodoch grafu urobíme dotýčnicu a určíme graficky smernicu dotýčnice.

Ak máme funkciu danú tabuľkou hodnôt, určíme deriváciu ako podiel rozdielu hodnôt a dĺžky intervalu susedných buniek. Čím je interval medzi susednými bunkami menší, tým presnejšie deriváciu určíme. Výsledky najlepšie získame pomocou tabuľkového editora, napr. EXCEL.

1.4.4 Integrál

Na niekoho pôsobia samotné názvy derivácia a integrál odstrašujúcim dojmom niečoho tajomného a ťažko pochopiteľného, a pritom je to celkom jednoduché. O jednoduchosti derivácií sme pojednali v predchádzajúcej časti, teraz sa pozrieme na integrál (*význam celok, súčet*).

Ak chceme dostať celkovú zmenu stavovej veličiny $y = f(x)$, spočítame jednotlivé elementárne zmeny od začiatku až do konca intervalu

$$\Delta y = \sum_{i=1}^N \Delta y_i \quad \rightarrow \quad \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} dy.$$

Označenie súčtu znakom suma sa použije, ak sú sčítané prírastky spočítateľné, a teda ich možno označiť indexom. Ak sú príspevky veľmi malé (elementárne) a príspevkov je veľmi veľa, použijeme znak integrál - ale v podstate ide o to isté - súčet.

Ak uvažíme zavedenie derivácie ako podielu elementárnych zmien (1.31) a (1.32), môžeme písať

$$\Delta y = \Delta f(x) = \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = f(x_2) - f(x_1).$$

Ako vidíme, ide o vzťah medzi funkciou $g(x)$ a $f(x)$ ako pri derivovaní, ale v opačnom smere, pozri Tab 1.1.

Priradením $g(x) \rightarrow f(x)$ určíme tzv. **neurčitý integrál (primitívnu funkciu)**. Pre konkrétne výpočty ale potrebujeme určiť hodnotu na danom intervale premennej x , tzn. **určitý integrál**. Ak teda chceme vypočítať určitý integrál funkcie $g(x)$ v medziach od x_1 do x_2 , najprv nájdeme k funkcii $g(x)$ jej primitívnu funkciu $f(x)$ (buď si ju pamätáme alebo použijeme vhodnú príručku, príp. internet), a potom vypočítame rozdiel hodnôt primitívnej funkcie v hornej a dolnej medzi - **aké jednoduché**.

Určitú konkrétnejšiu predstavu sú urobíme grafickou interpretáciou určitého integrálu.

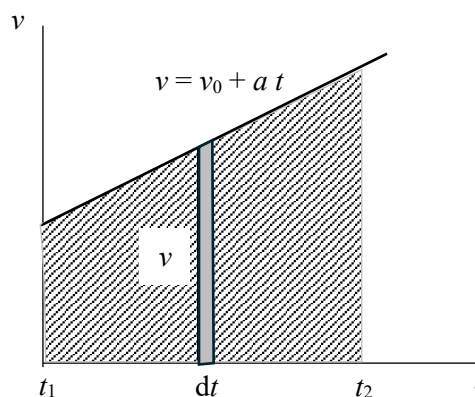
Uvažujte lineárnu závislosť rýchlosti od času (rovnomerne zrýchlený pohyb). Súčin $v dt$ je elementárna dráha $ds = v dt$. Zároveň vidíme, súčin zodpovedá ploche pásika pod krivkou závislosti. Integrál znamená súčet, a teda súčet plôch všetkých pásikov je celkový obsah plochy pod krivkou od začiatku do konca intervalu.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at) dt = \int_{t_1}^{t_2} v_0 dt + a \int_{t_1}^{t_2} t dt.$$

S použitím tab. 1.1 dostaneme

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v_0 dt + a \int_{t_1}^{t_2} t dt = v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2).$$

O výsledku sa môžeme presvedčiť aj určením obsahu plochy lichobežníka v grafe.



V tomto prípade môžeme použiť jednoduchú geometrickú predstavu, ale v prípade zložitejších závislostí sa bez integrácie nezaobídeme.

Ak napr. rýchlosť klesá exponenciálne $v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, kde τ je konštanta, celková dráha až do

$$\text{zastavenia, tzn. } t_2 \rightarrow \infty, \quad s = \int_0^{\infty} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -v_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = v_0 \tau.$$

Pre integrál platia podobné pravidlá ako pre bežné sčítanie – zákon komutatívny, asociatívny, distributívny, a pod.

Niekedy je úlohou integrovať zložitejšiu závislosť, ktorej funkciu nenájde v tab. 1.1 alebo podobnom zdroji informácií. Možnými cestami je integrovanú funkciu transformovať na tvar, ktorý už v tab. 1.1 nájdeme. Používané transformácie sú **metóda substitučná** a **metóda per partes**. S metódami sa bližšie zoznámime pri riešení konkrétnych úloh.

Numerická integrácia

Ak máme funkciu danú diskretnými hodnotami formou tabuľky, napr. v tabuľkovom editore v počítači, s dostatočne jemným rovnomerným delením nezávislej premennej, stanovíme pre každý interval $\Delta x = x_2 - x_1$ obsah stĺpca (lichobežníka) $\frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$. Ak je interval Δx dostatočne malý, je zakrivenie hornej strany stĺpca zanedbateľné, a tak možno stĺpec považovať s dostatočnou presnosťou za lichobežník. Súčet obsahov všetkých lichobežníkov na intervale integrácie zodpovedá hodnote určitého integrálu funkcie. Túto metódu možno použiť výhodne s použitím počítača, napr. v tabuľkovom editore EXCEL. Ak máme jednotlivé intervaly nezávislej premennej dané napr. hodnotami merania a sú pomerne veľké, môžeme pre účel integrácie použiť regresnú krivku a podľa nej doplniť súbor hodnôt a zjemniť základný interval integrácie.

1.5 Vyšetrovanie priebehu funkcií

Pri riešení fyzikálnych úloh často dostávame závislosť (vyjadrenie) fyzikálnej veličiny pomocou iných veličín znázornenej vo forme funkcie. Zvyčajne sa chceme o tejto funkcii dozvedieť čo najviac a formulovať závery o vplyve jednotlivých veličín na výsledok riešenia úlohy.

Najlepšiu predstavu o priebehu funkcie získame jej grafickým znázornením. Z grafu vidíme, či je rastúca alebo klesajúca, či má lokálne extrém, či je ohraničená alebo neohraničená, na akom intervale je definovaná, či má napr. nulové body, atď.

Často požadujeme presné určenie niektorých parametrov, ako je napr. nulový bod, smernica dotyčnice, poloha maxima (minima), a pod.

Ak máme funkciu $y = f(x)$, nulové body hľadáme riešením rovnice $f(x) = 0$.

Pri hľadaní smernice dotyčnice (rýchlosti zmeny, gradientu) využívame štandardne prvú deriváciu. Kladná derivácia zodpovedá rastúcej funkcii, záporná klesajúcej. Nulová derivácia označuje lokálny extrém (lokálne minimum alebo maximum) alebo inflexný bod. Ak charakter bodu s nulovou deriváciou nevyplýva priamo z fyzikálnej úvahy, možno sa o ňom presvedčiť druhou deriváciou – kladná určuje minimum, záporné maximum a nulová inflexný bod.

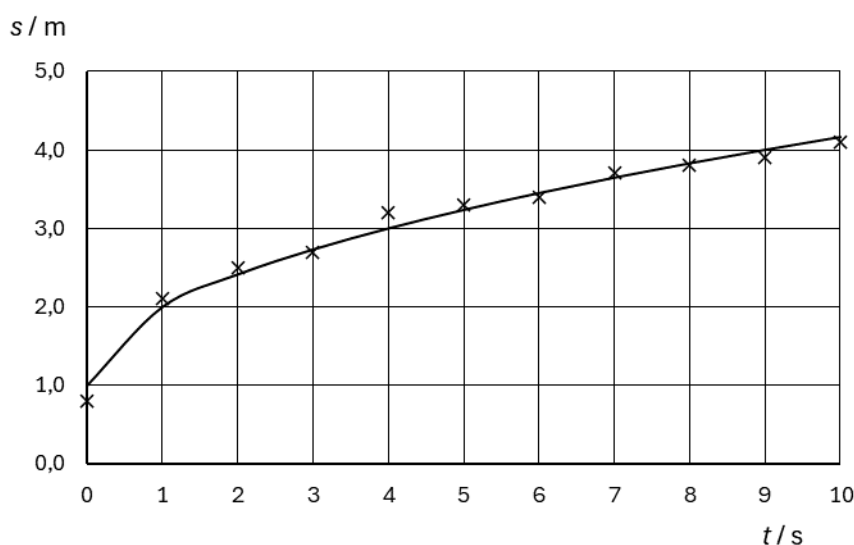
Niekedy možno použiť špeciálne úvahy. Napr. výsledok dostaneme v tvare kvadratickej funkcie – polohu extrémumu môžeme určiť pomocou dvojice nulových bodov, pričom extrém je v strede medzi nimi.

1.5.1 Grafické znázorňovanie funkčných závislostí veličín

Kreslenie grafov

Často požadujeme znázornenie výsledku merania alebo výpočtu v grafickej forme. Grafy môžu byť veľmi rozmanité od stĺpcových, koláčových až po matematické. Pri znázorňovaní fyzikálnych závislostí sa najčastejšie stretávame s dvojrozmernými matematickými grafmi.

Kreslenie grafov má základné pravidlá (obr. 1.1):



Obr. 1.1 Príklad dvojrozmerného lineárneho grafu

- i) zakreslíme osi, prípadne aj mriežku
 - ii) osi označíme veličinou a jednotkou
 - iii) krajné hodnoty stupníc sa volia tak, aby graf pokrýval čo najväčšiu plochu obrázku
 - iv) na osiach je rovnomerne rozdelená stupnica (hodnoty nameraných bodov sa neudávajú)
 - v) namerané body sa označia vhodnou značkou (ak sa vynášajú viaceré závislosti, každá sa označí inou značkou, napr. $\times$, $\square$, $\diamond$, $\triangle$, $\bullet$)
 - vi) ak má nameraná hodnota určenú neistotu, vyznačíme ju v grafe značkou $\overline{\text{O}}$, pričom hranice značky zodpovedajú neurčitosti
 - vii) vynesie sa najpravdepodobnejšia (regresná) hladká krivka zodpovedajúca nameraným bodom (namerané body sa nespájajú, s výhodou sa používajú rôzne regresné programy v kalkulačke alebo počítači)
 - viii) v prípade znázornenia teoretickej krivky sa jednotlivé body neznázorňujú.
- Pozn.: Pri zostrojovaní grafov sa s výhodou využívajú rôzne počítačové programy.

Regresia grafickej závislosti

Regresia predstavuje výpočet a zobrazenie najpravdepodobnejšej krivky zodpovedajúcej nameraným bodom grafu. Regresnú funkciu hľadáme tak, aby súčet kvadratických odchýlok nameraných hodnôt a hodnôt funkcie v jednotlivých nameraných bodoch bol minimálny. Z tejto podmienky sa získajú parametre krivky. Okrem toho sa určuje neistota týchto parametrov podobne ako v ods. 1.2.1. Ručný výpočet je príliš zdĺhavý, ale existuje rad programov na výpočet regresných funkcií, vrátane regresného koeficientu a neistôt parametrov funkcie. Regresiou sú vybavené aj kalkulačky.

Najjednoduchšia je lineárna regresia. Môžeme ale voliť i iné typy regresných funkcií, polynomicke, exponenciálne, logaritmické, a pod. podľa trendu hodnôt alebo očakávanej závislosti. Parametre regresnej funkcie sa rieši metódou minimálnej kvadratickej odchýlky.

Linearizácia nelineárnych funkcií

Ak chceme overiť určitú predpokladanú závislosť, najjednoduchšie je danú funkciu vhodnou transformáciou linearizovať. Znamená to zaviesť také premenné, že závislosť týchto premenných je lineárna, napr.:

pôvodná funkcia $y = a + \frac{b}{x}$, nové premenné $u = 1/x$, $v = y$, nová funkcia $v = a + b u$,

pôvodná funkcia $y = A \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$, nové premenné $v = x$, $u = \ln y$, teda $u = \ln A - \frac{1}{b} v$.

Zostrojíme potom funkciu $u = f(v)$, ktorá je lineárna. Namerané hodnoty prepočítame na nové premenné, zakreslíme ich do grafu (v, u) a urobíme lineárnu regresiu.

Regresia metódou minimálnej kvadratickej odchýlky (minimálnych štvorcov)

Uvažujme súbor nameraných hodnôt (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, ktoré by mali zodpovedať lineárnej závislosti $y = kx + q$.

Lineárna regresia predstavuje stanovenie parametrov závislosti k a q tak, aby súčet kvadratických odchýlok bol minimálny. Zavedieme funkciu

$$f(k, q) = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (kx_i + q)]^2.$$

Ide o funkciu dvoch premenných. Podmienka minima zodpovedá nulovej derivácii funkcie podľa obidvoch premenných (parciálne derivácie)

$$\frac{\partial f(k, q)}{\partial k} = \sum_{i=1}^n 2[y_i - (kx_i + q)](-x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial f(k, q)}{\partial q} = \sum_{i=1}^n 2[y_i - (kx_i + q)](-1) = 0.$$

Rovnice upravíme na tvar

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - k \sum_{i=1}^n x_i^2 - q \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i - nq = 0.$$

Z nich dostávame

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad q = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Keďže meranie je zaťažené určitou nepresnosťou, prejaví sa to aj v nepresnosti určenia parametrov k a q . Predpokladajme, že k danej (presnej) hodnote x_i určíme hodnotu y_i s neistotou δy_i . Neistota j -tej hodnoty sa prejaví neistotou parametrov

$$\delta k_j = \frac{\partial k}{\partial y_j} \delta y_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n x_j}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \delta y_j, \quad \delta q_j = \frac{\partial q}{\partial y_j} \delta y_j = \frac{x_j \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \delta y_j.$$

Výsledná štandardná odchýlka parametrov je daná odmocninou súčtu kvadratických parciálnych príspevkov

$$\delta k = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (\delta k_j)^2}, \quad \delta q = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (\delta q_j)^2}.$$

Pozn.: Keďže ide sústavu s dvoma parametrami, je v menovateli $n-2$.

Ak predpokladáme, že neistota $\delta y_i = \delta y$ je rovnaká pre všetky merania, štandardné odchýlky upravíme na tvar

$$\delta k = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \frac{\delta y}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \quad \text{a} \quad \delta q = \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \delta y.$$

Regresia lineárnou závislosťou prechádzajúcou počiatkom $y = kx$

$$\Delta y_i = y_i - k x_i$$

$$f(k) = \delta y^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - k x_i)^2$$

Rovnakým postupom pre $\delta y_i = \delta y$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2)} \quad \text{a} \quad \delta k = \frac{\delta y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2)}}.$$

1.5.2 Analýza a náhrady funkcií

Často v priebehu riešenia problému prideme k analýze funkcie, ktorá je celkove veľmi zložitá. Nás ale zaujíma iba určitý úzky interval hodnôt veličín. Snažíme sa potom funkciu na danom intervale zjednodušiť. Častým zjednodušením je náhrada funkcie polynómom (Taylorov rad), radom goniometrických funkcií (Fourierov rad) a pod.

Najčastejšie využívame náhradu funkcie polynómom.

Uvažujme funkciu $y = f(x)$ a chceme ju nahradiť jednoduchým polynómom v okolí bodu x_0 . Matematická teória rieši problém exaktne, my sa však sústredíme na zjednodušený výklad. Vychádzame z toho, že fyzikálne funkcie sú „rozumné“ a spĺňajú podmienky na náhradu polynómom.

Funkciu nahradíme polynómom

$$y = f(x) = y_0 + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + c(x - x_0)^3 + \dots$$

Vo všeobecnosti je rad nekonečný, ale pre praktické účely často vystačíme s prvými členmi do tretej mocniny. Prečo? Lebo prvé tri mocninové členy vystihujú základný charakter funkcie v blízkom okolí bodu x_0 . Vyššie členy iba korigujú náhradu vo väčšej vzdialenosti od bodu x_0 .

Prvý (nultý) člen udáva polohu bodu (x_0, y_0) . Prvý mocninový (lineárny) člen udáva strmnosť funkcie v danom bode (smernicu dotyčnice). Druhý mocninový (kvadratický) člen – úsek paraboly, udáva symetrické zakrivenie funkcie v bode x_0 (odchýlku od lineárneho priebehu rovnakú po oboch stranách). Tretí mocninový (kubický) člen koriguje nesymetriu zakrivenia (podľa znamienka na jednej strane pridá, a druhej uberie).

Ak majú funkcia $y(x)$ a náhradný polynóm v bode x_0 rovnakú hodnotu, prvú, druhú a tretiu deriváciu, priebehy oboch funkcií sa s vysokou mierou presnosti zhodujú na malom intervale v okolí bodu x_0 . Podmienka zhody je teda

$$y_0 = f(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \left[a + 2b(x-x_0) + 3c(x-x_0)^2 + \dots \right]_{x=x_0} = a$$

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \left[2b + 3 \cdot 2c(x-x_0) + \dots \right]_{x=x_0} = 2b$$

$$\left. \frac{df^3(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} = \left[3 \cdot 2 \cdot 1c + \dots \right]_{x=x_0} = 3!c = 6c.$$

Rovnako sa postupuje pri rešpektovaní ďalších vyšších členov náhrady. Výsledok náhrady funkcie polynomickým (Taylorovým) radom je

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots,$$

kde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ je faktoriál prirodzeného čísla n .

Ako príklad uvidíme aproximácie funkcií v okolí bodu $x_0 = 0$:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{1}{2}k(k-1)x^2 + \dots,$$

konkrétne $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

v prvom priblížení $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \approx 1 + x$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \approx x - \frac{1}{6}x^3 \approx x$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \approx 1$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \approx x - \frac{1}{2}x^2 \approx x.$$

1.5.3 Fourierov rad

Podobne ako je možné nahradiť funkciu Taylorovým (mocninovým) radom, periodickú funkciu možno nahradiť radom harmonických funkcií.

Ak má funkcia $f(t)$ periódu T , tzn. $f(t) = f(t + T)$, resp. uhlovú frekvenciu $\omega = 2\pi / T$, funkciu nahradíme radom

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t).$$

Prípadné detaily možno nájsť v príslušnej literatúre alebo na internete.

1.6 Riešenie rovníc

Analýza fyzikálneho problému väčšinou vedie k riešeniu rovnice. V jednoduchších prípadoch vystačíme s všeobecným analytickým riešením. Ak nás zaujíma riešenie v úzkom intervale premennej, môžeme využiť zjednodušenie zložitejších funkcií napr. náhradou polynómom.

1.6.1 Riešenie kvadratickej rovnice

Uvažujme kvadratickú rovnicu

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ resp. } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Rovnicu upravíme na tvar

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0, \text{ resp. } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

odkiaľ dostávame

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \text{ alebo } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diskriminant rovnice je (výraz pod odmocninou) $D = b^2 - 4ac$.

Pre $D > 0$ má rovnica dva reálne korene, pre $D = 0$ jeden koreň dvojnásobný, a pre $D < 0$ dva korene komplexné.

1.6.2 Riešenie kubickej rovnice

Všeobecné analytické riešenie má aj kubická rovnica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Riešenie rovnice publikoval učenec z Oxfordu Thomas Harriot (v 17. storočí), pričom použil dvojí substitúciu.

Prvá substitúcia $x = t - \frac{a}{3}$ odstráni kvadratický člen.

Po dosadení rovnicu upravíme na tvar

$$t^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)t + c + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab = 0, \text{ resp. } t^3 + pt + q = 0.$$

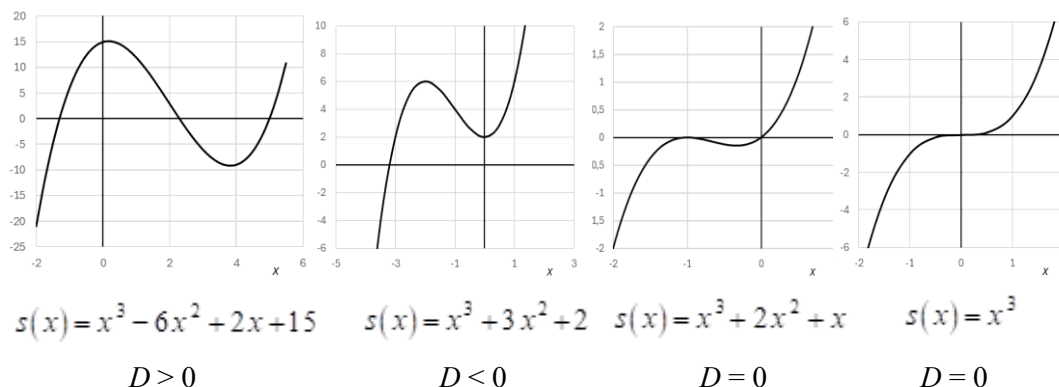
Druhá substitúcia $t = y - \frac{p}{3y}$ pre $y \neq 0$ prevedie rovnicu na kvadratickú.

Po dosadení máme $y^3 - \left(\frac{p}{3y}\right)^3 + q = 0$, resp. $y^6 + qy^3 - \frac{1}{9}p^3 = 0$.

Táto rovnica je kvadratická rovnica pre $z = y^3$

$$z^2 + qz - \frac{1}{9}p^3 = 0, \text{ ktorá má riešenie } z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}p^3}.$$

Konkrétne riešenia zostaneme spätnou cestou od z k x .



Diskriminant uvedenej rovnice (kubický člen x^3 s koeficientom 1) je

$$D = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^2,$$

a platí: pre $D > 0$ má rovnica tri reálne korene, pre $D < 0$ má jeden reálny koreň a dva komplexne združené, pre $D = 0$ jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný, alebo jeden trojnásobný koreň.

Tieto tvrdenia názorne zobrazujú grafy funkcií $s(x)$, pričom reálne riešenia predstavujú priesečníky grafu funkcie s osou x .

V niektorých prípadoch, keď nevieme rovnicu riešiť analyticky, alebo je analytické riešenie komplikované, možno pristúpiť ku grafickému alebo numerickému riešeniu rovnice. V týchto prípadoch však musíme rovnicu riešiť iba pre konkrétne numerické hodnoty, a tým sa vytráca všeobecný charakter riešenia.

Riešením rovnice často dostávame viac riešení, a preto súčasťou riešenia je aj posúdenie, ktoré z riešení má fyzikálny zmysel.

1.6.3 Grafické – numerické riešenie rovnice

Pri riešení zložitejších rovníc, najmä s nelineárnymi funkciami, môžeme všetky členy rovnice presunúť na ľavú stranu a na pravej tak máme nulu, $f(x) = 0$. Na základe výpočtu hodnôt v niekoľkých bodoch zakreslíme graf funkcie a nájdeme priesečníky s osou x , ktoré predstavujú reálne riešenia rovnice. Najprv zakreslíme graf orientačne (na hrubo). Po identifikácii nulových bodov funkcie riešenie spresníme výpočtom hodnôt v tesnom okolí nájdeného nulového bodu. Riešenie tak môžeme postupne spresňovať. S výhodou sa pritom využíva naprogramovanie funkcie vo vhodnom výpočtovom prostredí.

Tento spôsob riešenia rovnice neumožňuje určiť komplexné riešenia rovnice.

1.6.4 Numerické riešenie

Numerické riešenie rovnice sa robí rovnako ako grafické, len s tým rozdielom, že nekreslíme graf funkcie, ale hodnoty zapisujeme do tabuľky, až kým nie sú v susedných bunkách tabuľky hodnoty s opačným znamienkom. Po začiatočnom identifikovaní nulových bodov riešenie spresňujeme metódou postupného približovania. Existujú síce špeciálne metódy numerického riešenia, ale pre účely bežných fyzikálnych výpočtov postačí jednoduchá metóda postupného približovania.

Opäť s výhodou využijeme výpočtovú techniku – programovateľnú kalkulačku alebo počítač.

1.7 Komplexné čísla

V oblasti reálnych čísiel nie je definovaná odmocnina záporného čísla. Pritom s odmocninou záporného čísla sa stretávame často, napr. pri riešení kvadratickej rovnice. Táto odmocnina predstavuje dôležitú informáciu, preto jej treba priradiť tiež určitú hodnotu, ktorá však nespadá do množiny reálnych čísiel. Pre takého čísla sa používa označenie symbolom „i“ a názov imaginárne číslo. Symbol „i“ zároveň predstavuje imaginárnu jednotku $i = \sqrt{-1}$, takže ľubovoľné imaginárne číslo vyjadríme ako reálny násobok imaginárnej jednotky

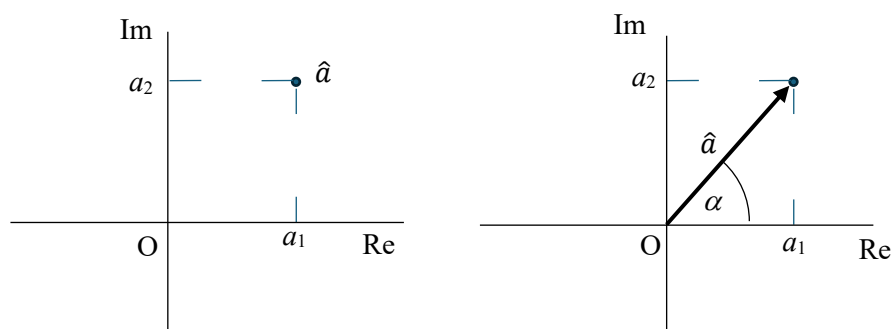
$$\hat{a} = \sqrt{-a^2} = a \sqrt{-1} = i a.$$

Komplexné číslo je súčet čísla reálneho a imaginárneho $\hat{c} = a + i b$, kde a je reálna zložka a b imaginárna zložka komplexného čísla.

Komplexné čísla sa zvyčajne označujú v tlačnom texte tučným stojatým písmom **b**. Niekedy, a najmä v ručne písanom texte strieškou nad veličinou $\hat{b}$ alebo bodkou $\dot{a}$, prípadne vodorovnou čiarkou $\bar{a}$ nad veličinou – podľa potreby a dohody.

1.7.1 Znázornenie komplexných čísiel a veličín

Komplexné číslo obsahuje dve nezávisle premenné. To umožňuje grafické znázornenie komplexného čísla v 2D ortogonálnom priestore (Gaussovej rovine) s dvomi kolmými osami, na ktoré sa vynášajú reálne čísla na os Re a imaginárne čísla na Im os.



Komplexnému číslu prislúcha v Gaussovej rovine bod so súradnicami a_1, a_2 (obrázok vľavo). Komplexnému číslu môžeme v Gaussovej rovine priradiť vektor so začiatkom v bode O, (priesečníku osí Re a Im – obrázok vpravo), ktorý zvierá s osou Re uhol α .

Komplexné číslo sa vyznačuje modulom (veľkosťou) $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ a argumentom (uhlom) α .

Okrem algebrického tvaru komplexného čísla $\hat{a} = a_1 + i a_2$

sa používa goniometrický tvar $\hat{a} = A (\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Tretím je tvar exponenciálny $\hat{a} = A e^{i\alpha}$.

Pozn.: Orientačné potvrdenie rovnosti tvarov

$$\hat{a} = A (\cos \alpha + i \sin \alpha) = A e^{i\alpha}.$$

Po zderivovaní

$$\frac{d\hat{a}}{d\alpha} = A (-\sin \alpha + i \cos \alpha) = i A (\cos \alpha + i \sin \alpha) = i \hat{a} = i (A e^{i\alpha}).$$

Ak uvažíme rovnosť $i^2 = -1$, dostávame

$$|\hat{a}| = A \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = A, \text{ zároveň } |\hat{a}| = A |e^{i\alpha}| = A, \text{ tzn. } |e^{i\alpha}| = 1.$$

Exponenciálna funkcia $e^{i\alpha}$ s imaginárnym exponentom predstavuje komplexnú jednotku s argumentom α , resp. jednotkový vektor v smere uhlu α .

1.7.2 Operácie s komplexnými číslami

Práca s komplexnými číslami (veľičinami) je jednoduchá, platia bežné pravidlá algebry.

Sčítanie (odčítanie) komplexných čísel

$$(a_1 + i a_2) \pm (b_1 + i b_2) = (a_1 \pm b_1) + i (a_2 \pm b_2)$$

Násobenie komplexných čísel

$$(a_1 + i a_2)(b_1 + i b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1), \text{ pričom } i^2 = -1$$

Delenie komplexných čísel

$$\frac{a_1 + i a_2}{b_1 + i b_2} = \frac{a_1 + i a_2}{b_1 + i b_2} \frac{b_1 - i b_2}{b_1 - i b_2} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Výhodné je násobenie a delenie v exponenciálnom tvare

$$\hat{a} \hat{b} = A e^{i\alpha} B e^{i\beta} = AB e^{i(\alpha+\beta)}, \quad \frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{A e^{i\alpha}}{B e^{i\beta}} = \frac{A}{B} e^{i(\alpha-\beta)}.$$

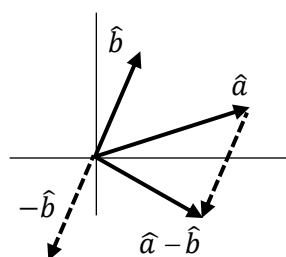
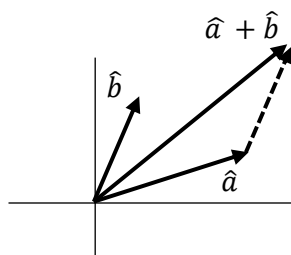
Podobne mocnina

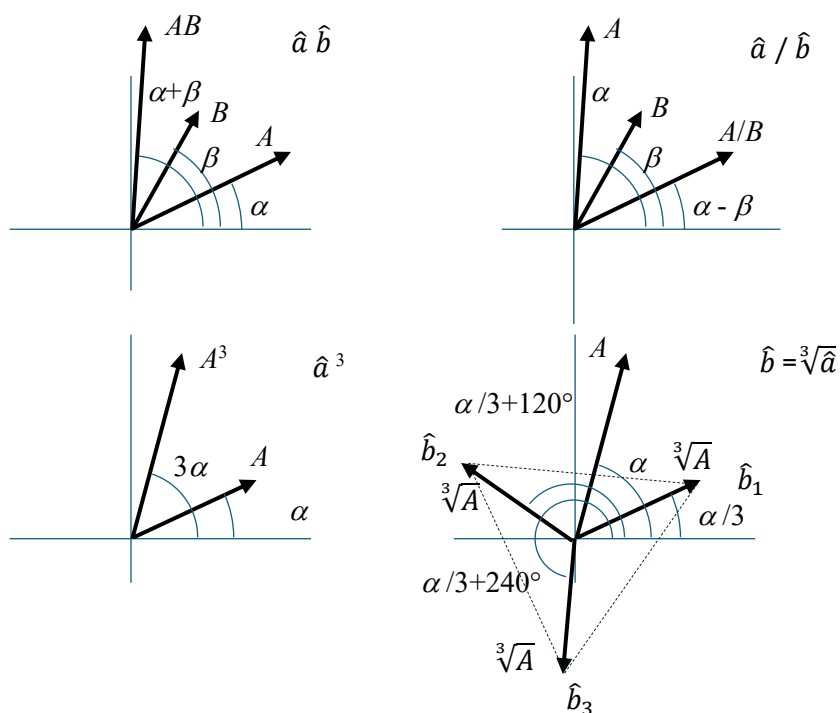
$$\hat{a}^n = (A e^{i\alpha})^n = A^n e^{in\alpha}.$$

Odmocninou je číslo, ktoré po umocnení dá pôvodné číslo. n -tá odmocnina má tak n výsledkov

$$\sqrt[n]{\hat{a}} = \sqrt[n]{A e^{i\alpha}} = \sqrt[n]{A} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \text{ kde } k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Tieto úkony možno znázorniť i graficky v Gaussovej rovine





Riešenia n -tej odmocniny ležia vo vrcholoch rovnostranného n -uholníka, prvé riešenie je pod uhlom α/n (na obrázku je 3. odmocnina).

S použitím komplexných veličín možno jednoducho odvodiť niektoré goniometrické vzťahy

$$(e^{i\alpha})^2 = e^{i2\alpha} \Rightarrow (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + i 2 \sin \alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Porovnaním reálnych častí a imaginárnych častí rovnice dostávame

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{a} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Podobne možno postupovať pri odvodení $\cos 3\alpha$ a $\sin 3\alpha$ atď.

Funkcie $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ sa nazývajú harmonické funkcie a opisujú harmonické (sínusové) kmity.

Preto aj ich kombinácia je harmonickou funkciou, teda aj $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ je harmonická funkcia v komplexnom tvare.

Harmonická funkcia sa s výhodou používa pri riešení úloh s kmitmi a vlnami, alebo pri riešení striedavých elektrických obvodov.

1.8 Diferenciálne rovnice

Keďže fyzikálne deje predstavujú zmeny a zmeny opisujú časové derivácie, je zřejmé, že bez derivácií sa opis fyzikálnych dejov nezaobíde. Je síce pravda, že za určitých jednoduchých podmienok môžeme derivácie nahradiť jednoduchými zlomkami (napr. rovnomerne zrýchlený pohyb), ale vzniká tak nesprávny dojem, že všetky deje sa dajú opísať jednoduchými algebrickými rovnicami a derivácie a integrály sú len zbytočnou komplikáciou. Stačí ale riešiť pohyb telesa s odporom prostredia závislým od rýchlosti pohybu a bez derivácií a integrálov úlohu nevyriešime. Deje opisujú rovnice, a ak sa v rovnici vyskytuje funkcia (veličina) a jej derivácie, hovoríme o *diferenciálnej rovnici*.

Diferenciálne rovnice sú teda rovnice obsahujúce derivácie veličín. Rád diferenciálnej rovnice je daný najvyšším rádom derivácie v rovnici.

Diferenciálne rovnice delíme na lineárne a nelineárne, homogénne a nehomogénne. Diferenciálna rovnica je lineárna, ak sa v nej vyskytuje hľadaná funkcia a jej derivácie v samostatných členoch v prvej mocnine. Diferenciálna rovnica je nelineárna, ak má aspoň jeden nelineárny člen (funkcia alebo jej derivácia vo vyššej mocnine alebo súčin funkcie a jej derivácie alebo súčin dvoch alebo viacerých derivácií). Homogénna je diferenciálna rovnica, ktorá má všetky členy obsahujúce hľadanú funkciu a jej derivácie na ľavej strane, a pravú stranu má nulovú. Ak je pravá strana nenulová, je diferenciálna rovnica nehomogénna. Pravá strana predstavuje zdrojovú funkciu pre hľadanú funkciu.

Ďalej sú diferenciálne rovnice obyčajné, ktoré obsahujú iba obyčajné derivácie (derivácie funkcie jednej premennej), a parciálne, ktoré obsahujú parciálne derivácie funkcie viacerých premenných. S konkrétnymi prípadmi sa oboznámite v riešených úlohách.

Riešiť diferenciálnu rovnicu znamená hľadať funkciu, ktorá rovnici vyhovuje. Využíva sa k tomu intuícia (odhad) alebo matematická príručka, v ktorej sa nachádzajú rôzne typy diferenciálnych rovníc a ich riešenie.

Niektoré jednoduché diferenciálne rovnice sa dajú riešiť priamou integráciou, napr.

$$m \frac{dv}{dt} = -k v^2 \text{ - rovnica pohybu spomaleného dynamickým odporom prostredia.}$$

Rovnicu upravíme na tvar rovnice, ktorú možno priamo integrovať

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt.$$

Integráciou ľavej a pravej strany v medziach zodpovedajúcich začiatočnému a konečnému stavu dostávame

$$\int_{v_0}^v \frac{dx}{x^2} = \int_0^t -\frac{k}{m} dx \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_{v_0}^v = -\frac{k}{m} x \Big|_0^t \Rightarrow -\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = -\frac{k}{m} (t - 0),$$

odkiaľ máme

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{k v_0}{m} t} = \frac{v_0}{1 + at}, \text{ kde } a = \frac{k v_0}{m} \text{ - rýchlosť klesá hyperbolicky.}$$

Priamou integráciou možno riešiť diferenciálne rovnice iba v špeciálnych jednoduchých prípadoch. Vo všeobecných prípadoch sa postupuje tak, že

- i) odhadneme tvar funkcie, ktorá je riešením rovnice (na základe vlastných vedomostí, kvalifikovaného odhadu alebo s pomocou matematickej učebnice)
- ii) odhadnutú funkciu dosadíme do rovnice a presvedčíme sa, či rovnici vyhovuje – ak nevyhovuje, hľadáme ďalšiu funkciu, až kým tú správnu nenájde (ak nenájde vhodnú funkciu požiadame o pomoc odborníkov – matematikov)
- iii) detaily funkcie prispôbime danej rovnici a použijeme začiatočné podmienky

Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice

Homogénna diferenciálna rovnica sa vyznačuje nulovou pravou stranou, pričom hľadaná funkcia a jej derivácie sú na ľavej strane.

Najjednoduchší prípad predstavuje homogénna lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \text{ kde } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \text{ sú konštanty.}$$

Pýtame sa: ktorá funkcia $y = f(x)$ má tú vlastnosť, že funkcia i jej derivácie majú rovnaký tvar? Ak má byť rovný nule súčet členov, ktoré sú funkciami, musia mať všetky členy rovnaký tvar (súčet rôznych funkcií nemôže byť identicky rovný nule)

Jediná funkcia, ktorá spĺňa túto podmienku, je exponenciálna funkcia

$$y(x) = A e^{bx}, \quad y'(x) = b A e^{bx}, \quad y''(x) = b^2 A e^{bx}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = b^n A e^{bx}.$$

Funkcia i všetky jej derivácie sú až na konštanty rovnaké exponenciálne funkcie.

Po dosadení do rovnice dostávame

$$(b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0) A e^{bx} = 0.$$

Keďže $A e^{bx} \neq 0$, musí byť splnená rovnica (tzv. charakteristická rovnica)

$$b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 = 0.$$

Rovnica n -tého stupňa má všeobecne n riešení: $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Každá z funkcií $A_i e^{b_i x}$ je riešením rovnice (po dosadení dá na pravej strane nulu), a tak aj funkcia

$$y(x) = \sum_{i=1}^n A_i e^{b_i x} \text{ je všeobecným riešením danej homogénnej diferenciálnej rovnice.}$$

Všeobecné riešenie teda obsahuje n neurčených konštánt A_1 až A_n . Na ich určenie potrebujeme n rovníc, v ktorých sa vyskytujú. Tie poskytujú začiatočné podmienky pre funkciu $y(0) = y_0$ a jej derivácie až po $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$. Riešenie diferenciálnej rovnice sa redukuje na riešenie sústavy algebrických rovníc.

Špeciálny prípad predstavuje diferenciálna rovnica 2. rádu

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \text{ resp. } \ddot{y} = -\omega^2 y.$$

Ktorá funkcia, okrem exponenciálnej, má tú vlastnosť, že jej druhá derivácia má rovnaký tvar ale opačné znamienko ako pôvodná funkcia? – túto vlastnosť má funkcia $\sin x$ a $\cos x$. Riešenie teda predpokladajme v najvšeobecnejšom tvare

$$y(t) = A \sin(kt + \alpha), \text{ pričom } \ddot{y}(t) = -k^2 A \sin(kt + \alpha).$$

Konštanta A umožňuje prispôbiť amplitúdu, konštanta k periódu a α posunutie na časovej osi.

Po dosadení do rovnice dostávame rovnosť $k = \omega$.

Hodnoty A a φ určíme zo začiatočných podmienok

$$y(0) = y_0 = A \sin \varphi \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = y_1 = \omega A \cos \varphi.$$

Iný zvláštny prípad predstavuje diferenciálna rovnica 2. rádu

$$\ddot{y} - c^2 y = 0, \text{ resp. } \ddot{y} = c^2 y.$$

Ktorá funkcia, okrem exponenciály, má tú vlastnosť, že jej druhá derivácia má rovnaký tvar i znamienko ako funkcia pôvodná – sú to funkcie $\sinh x$ a $\cosh x$.

Riešenie predpokladáme v tvare

$$y(x) = A \sinh ax + B \cosh bx, \text{ pričom } y''(x) = a^2 A \sinh ax + b^2 B \cosh bx.$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice dostávame $a = b = c$.

Zo začiatočných podmienok

$$y(0) = y_0 = 0 + B \quad \text{a} \quad y'(0) = y_1 = c A$$

dostávame hodnoty konštánt A, B .

Ak riešime nehomogénnu diferenciálnu rovnicu hľadáme takú funkciu, že po dosadení do diferenciálnej rovnice dostaneme funkciu na pravej strane rovnice. Táto funkcia sa nazýva *parciálne (čiastočné) riešenie*.

Ak k parciálnemu riešeniu pridáme riešenie homogénnej rovnice (bez danej funkcie na pravej strane), nič nepokazíme, lebo toto riešenie neovplyvní pravú stranu rovnice.

Všeobecné riešenie je tak súčtom riešenia homogénnej rovnice a parciálneho riešenia.

V prípade riešenia časových priebehov veličín, napr. rýchlosti pohybu alebo prúdu v elektrickom obvode, predstavuje riešenie homogénnej rovnice *prechodný dej* a parciálne riešenie *ustálenú zložku*.

Uvažujme príklad rovnice

$$\dot{y} + \lambda y = K.$$

Riešenie homogénnej rovnice $\dot{y} + \lambda y = 0$ je $y(t) = A e^{at}$, a po dosadení $y_h(t) = A e^{-\lambda t}$.

Aká funkcia po dosadení do diferenciálnej rovnice dá konštantu K ? Jediná možnosť je opäť konštantná funkcia $y_p(t) = B$. Po dosadení $\lambda B = K$. Úplné riešenie je teda $y(t) = A e^{-\lambda t} + \frac{K}{\lambda}$.

Konštantu A určíme zo začiatočnej podmienky.

Uvažujme iný príklad s pravou stranou v tvare harmonickej funkcie

$$\ddot{y} + \omega^2 y = K \sin \Omega t.$$

Riešenie homogénnej rovnice je $y(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$.

Pýtame sa, ktorá funkcia, dosadená do ľavej strany rovnice, dá funkciu na pravej strane? Ak má byť výsledkom harmonická funkcia s uhlovou frekvenciou Ω , musí byť na ľavej strane tiež harmonická funkcia s rovnakou uhlovou frekvenciou vo všeobecnom tvare

$$y_p = B \sin(\Omega t + \beta).$$

Funkciu dosadíme do ľavej strany diferenciálnej rovnice a porovnáme s pravou stranou

$$-\Omega^2 B \sin(\Omega t + \beta) + \omega^2 B \sin(\Omega t + \beta) = K \sin \Omega t$$

Harmonické funkcie na ľavej strane rozložíme na sínusovú a kosínusovú zložku

$$(-\Omega^2 B \cos \beta + \omega^2 B) (\sin \Omega t + \sin \beta \cos \Omega t) = K \sin \Omega t.$$

Porovnaním sínusových a kosínusových zložiek na ľavej a pravej strane rovnice máme

$$B(\omega^2 - \Omega^2) \cos \beta = K \quad \text{a} \quad B(\omega^2 - \Omega^2) \sin \beta = 0.$$

Ak predpokladáme $B > 0$ a $\Omega \neq \omega$, dostávame $\sin \beta = 0$, tzn. $\cos \beta = \pm 1$ a $B = \frac{K}{|\omega^2 - \Omega^2|}$.

Úplné riešenie diferenciálnej rovnice je

$$y(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{K}{|\omega^2 - \Omega^2|} \sin \Omega t.$$

Konštanty A a α sa určia zo začiatočných podmienok $y(0) = y_0$ a $\dot{y}(0) = v_0$

$$y_0 = A \sin \alpha \quad \text{a} \quad v_0 = \omega A \cos \alpha + \frac{K \Omega}{|\omega^2 - \Omega^2|}.$$

Tretí príklad je lineárna diferenciálna rovnica s exponenciálnou pravou stranou

$$\dot{y} - a y = K e^{-bt}.$$

Riešenie homogénnej rovnice $y_h = A e^{at}$ (rastúca exponenciálna funkcia pre $a > 0$).

Ak je pravá strana exponenciála s koeficientom $-b$, musí byť i partikulárne riešenie exponenciálna funkcia s rovnakým koeficientom (ak by to tak nebolo, nemohla by sa ľavá strana rovnať pravej)

$$y_p = B e^{-bt}.$$

Po dosadení do ľavej strany dostávame

$$-b B e^{-bt} - a B e^{-bt} = K e^{-bt}, \text{ a teda } B = -\frac{K}{a+b}.$$

Úplné riešenie je

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A e^{at} - \frac{K}{a+b} e^{-bt},$$

pričom konštanta A sa určí zo začiatočnej podmienky $y(0) = y_0$.

V prípade nelineárnych rovníc alebo zložitejších pravých strán sa požívajú osobitné metódy, s ktorými sa možno oboznámiť v špeciálnej literatúre.