MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

1 Trojciferné číslo má ciferný súčet 16. Ak v tomto čísle zameníme cifry na miestach stoviek a desiatok, číslo sa o 360 zmenší. Ak v pôvodnom čísle zameníme cifry na miestach desiatok a jednotiek, číslo sa o 54 zväčší. Nájdite toto trojciferné číslo.

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Označme pôvodné trojciferné číslo $\overline{abc}$ čiže $100a+10b+c$. Podľa prvej informácie zo zadania platí $a+b+c = 16$ a podľa druhej $\overline{bac} = \overline{abc} - 360$, teda

$$\begin{aligned} 100b + 10a + c &= (100a + 10b + c - 360), \\ 360 &= 90a - 90b, \\ 4 &= a - b, \\ a &= b + 4. \end{aligned}$$

Podľa tretej informácie platí $\overline{acb} = \overline{abc} + 54$, teda

$$\begin{aligned} 100a + 10c + b &= (100a + 10b + c) + 54, \\ 9c - 9b &= 54, \\ c - b &= 6, \\ c &= b + 6. \end{aligned}$$

Ak z druhej, resp. tretej informácie vyjadríme $a = b + 4$, resp. $c = b + 6$ a dosadíme do vzťahu $a + b + c = 16$, dostaneme $3b + 10 = 16$, teda $b = 2$. Dosadením tohto výsledku do predchádzajúcich vyjadrení získame $a = 6$ a $c = 8$. Nájdené číslo 628 nazoaj vyhovuje zadaniu.

Pokyny:

Po 2 bodoch za každú z rovníc $a = b + 4$ a $c = b + 6$; 2 body za doriešenie sústavy a určenie neznámeho čísla. Správne riešenie bez ďalšieho komentára hodnoťte 1 bodom.

Poznámka:

Rozdiely čísel vzniknutých zámenou dvoch cifier sú vždy násobkom deviatich, pričom príslušný násobok zodpovedá miestam zamenených cifier. Napr. v predchádzajúcom riešení vidíme $\overline{abc}-\overline{bac} = 90(a-b)$ a $\overline{abc}-\overline{acb} = 9(b-c)$, podobne $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-b)$. Taká či podobná úvaha pred samotným riešením úlohy dovoľuje rýchlejšie odvodenie vzťahov $a = b + 4$ a $c = b + 6$.

Druhú, resp. tretiu informáciu zo zadania možno názorne zapísať takto:

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & b & a & c \\ \hline & 3 & 6 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & a & c & b \\ - & a & b & c \\ \hline & & 5 & 4 \end{array}$$

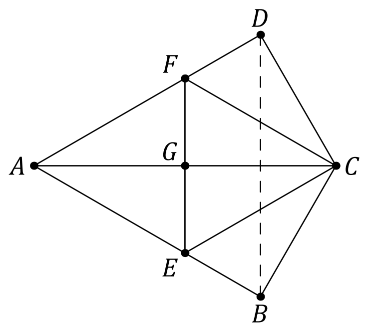
Porovnaním miest pri najvyšších rádoch zisťujeme, že $a - b$ je 3 alebo 4, resp. $c - b$ je 5 alebo 6 (dve možnosti pri každom rozdiele zodpovedajú tomu, či uvažujeme prechod cez desiatku alebo nie). Tieto obmedzenia spolu s $a = b + 4$ dávajú jediné riešenie, ktoré možno odhaliť systematickým skúšaním možností. Napr. podmienkam $a-b = 4$ a $a+b+c = 16$ vyhovujú čísla 952, 844, 736 a 628, z ktorých iba posledné uvedené vyhovuje aj vzťahu $c - b = 6$.

2 Štvoruholník $ABCD$ je súmerný podľa uhlopriečky AC. Dĺžka AC je 12 cm, dĺžka BC je 6 cm a vnútorný uhol pri vrchole B je pravý. Na stranách AB, AD sú dané body E, F tak, že trojuholník ECF je rovnostranný. Určte dĺžku úsečky EF.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

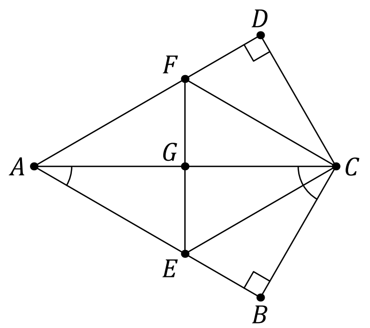
Trojuholníky ACB a ACD sú súmerné podľa spoločnej strany AC, body E, F ležia na stranách AB, AD a trojuholník ECF je rovnostranný, teda aj tento trojuholník je súmerný podľa AC. Preto úsečky EF a AC sú kolmé; ich priesečník označíme G.



Vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka majú veľkosť 60°. Os súmernosti, resp. výška rovnostranného trojuholníka tento uhol rozpoľuje a rozdeľuje trojuholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky so zvyšnými vnútornými uhlami 30° a 60°. Pomer prepony a kratšej odvesny v týchto menších trojuholníkoch je práve $2 : 1$. Tieto všeobecné poznatky využijeme v našej úlohe niekoľkorakým spôsobom:

Jednak priamka AC je osou súmernosti trojuholníka ECF, teda uhol ACE má veľkosť 30°. Jednak pomer prepony a kratšej odvesny v pravouhlom trojuholníku ABC je podľa zadania $2 : 1$, teda ide o polovicu rovnostranného trojuholníka, ktorého zvyšné vnútorné uhly BAC a ACB majú veľkosti 30° a 60°.

Z toho odvodzujeme, že uhol BCE má veľkosť 30° (rozdiel uhlov ACB a ACE). Teda trojuholník ABC pozostáva z troch navzájom zhodných pravouhlých trojuholníkov AGE, CGE a CBE (zhodujú sa vo vnútorných uhloch a každé dva majú spoločnú stranu).



Dlhšia odvesna v každom z týchto troch trojuholníkov sa zhoduje so stranou BC, ktorá má dĺžku 6 cm. Navyše pomer prepony a kratšej odvesny je $2 : 1$. Ak veľkosť prepony označíme a, tak podľa Pytagorovej vety platí

$$a^2 = 36\,\mathrm{cm}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Po úprave dostávame $a^2 = 48\,\mathrm{cm}^2$, teda $a = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \doteq 6{,}93\,\mathrm{cm}$. A to je veľkosť úsečky EF.

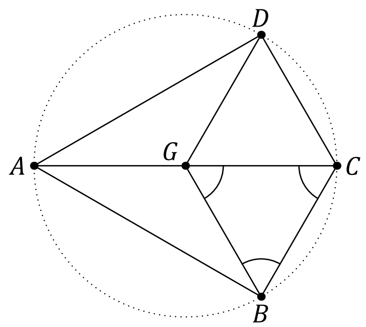
Pokyny:

2 body za určenie potrebných uhlov, resp. rozpoznanie polovíc rovnostranných trojuholníkov; 2 body za dopočítanie veľkosti EF; 2 body za zrozumiteľnosť a kvalitu komentára.

Poznámka:

Záverečný výpočet môže byť nahradený odkazom na známy vzťah medzi výškou a stranou rovnostranného trojuholníka. S uvedeným označením platí $6\,\mathrm{cm} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, t. j. $a = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

So znalosťou Tálesovej vety, resp. vety opačnej možno k veľkosti uhla ACB dospieť nasledovne: Keďže pri vrcholoch B a D je pravý uhol, ležia oba na kružnici s priemerom AC. Stred tejto kružnice je stredom úsečky AC a označíme ho G (ten istý bod ako v riešení uvedenom vyššie). Podľa zadania je polomer tejto kružnice rovný dĺžke strany BC ($\frac{1}{2}|AC| = |BC|$). Teda trojuholník GCB je rovnostranný, preto vnútorný uhol pri vrchole C má veľkosť 60°.



Z uvedeného okrem iného vyplýva, že body A, B, C, D sú štyri z vrcholov pravidelného šesťuholníka.

---

3 Ľudovít si pri istom príklade na delenie všimol, že keď delenec zdvojnásobí a deliteľ zväčší o 12, dostane svoje obľúbené číslo. To isté číslo by dostal, aj keby pôvodný delenec zmenšil o 42 a pôvodný deliteľ zmenšil na polovicu. Určte Ľudovítovo obľúbené číslo.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Ak delenca v pôvodnom príklade označíme a a deliteľa b, tak Ľudovítovo pozorovanie môžeme zapísať takto:

$$2a : (b + 12) = (a - 42) : \frac{b}{2}.$$

To je dvojaké vyjadrenie Ľudovítovho obľúbeného čísla, ktoré kvôli následným úpravám označíme c.

Z vyjadrenia vľavo dostávame

$$2a = bc + 12c,$$

z vyjadrenia vpravo dostávame

$$a - 42 = \frac{b}{2} \cdot c,$$
$$2a = bc + 84.$$

Porovnaním týchto dvoch vyjadrení zisťujeme, že $12c = 84$, t. j. $c = 7$.

Treba ešte dodať, že vyhovujúca dvojica čísel a a b naozaj existuje (dokonca je takýchto dvojíc neobmedzené množstvo), a to napríklad 49 a 2.

Ľudovítovo obľúbené číslo je teda 7.

Pokyny:

3 body za zápis vzťahov zo zadania a pomocné úpravy; 3 body za dopočítanie, výsledok a kvalitu komentára.

Náhodne odhalené možnosti vedúce k správnemu výsledku nemožno považovať za úplné riešenie úlohy. Také spracovanie hodnoťte nanajvýš 3 bodmi.

Poznámka:

Bez dodatočného označenia podielu môžeme upravovať úvodnú rovnosť:

$$2a \cdot \frac{b}{2} = (a - 42)(b + 12),$$
$$ab = ab - 42b + 12a - 12 \cdot 42,$$
$$42(b + 12) = 12a,$$
$$2a : (b + 12) = 7,$$

hľadaný podiel je teda 7.

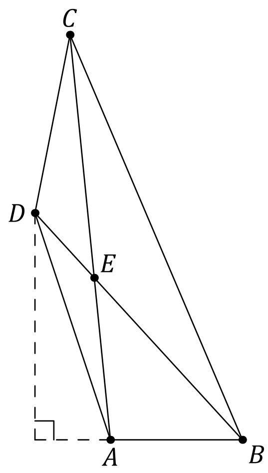
---

4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí, že E je priesečníkom uhlopriečok, trojuholníky ADE, BCE, CDE majú postupne obsahy $12\ \mathrm{cm}^2$, $45\ \mathrm{cm}^2$, $18\ \mathrm{cm}^2$ a dĺžka strany AB je 7 cm. Určte vzdialenosť bodu D od priamky AB.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Zo znalosti obsahov jednotlivých trojuholníkov určíme obsah trojuholníka ABD. Zo znalosti dĺžky strany AB určíme vzdialenosť bodu D od priamky AB.



Trojuholníky ADE a CDE majú spoločnú stranu DE a strany AE a EC ležiace na jednej priamke. Pomer ich obsahov je teda rovnaký ako pomer dĺžok strán AE a EC,

$$|AE| : |EC| = 12\,\mathrm{cm}^2 : 18\,\mathrm{cm}^2 = 2 : 3.$$

Podobne trojuholníky ABE a BCE majú spoločnú stranu BE a strany AE a EC ležiace na jednej priamke. Pomer ich obsahov je teda rovnaký ako pomer dĺžok strán AE a EC, čiže

$$\mathrm{S}(ABE) : 45\,\mathrm{cm}^2 = 2 : 3.$$

Z toho dostávame $\mathrm{S}(ABE) = 30\,\mathrm{cm}^2$. Obsah trojuholníka ABD je súčtom obsahov trojuholníkov ABE a ADE,

$$\mathrm{S}(ABD) = 30\,\mathrm{cm}^2 + 12\,\mathrm{cm}^2 = 42\,\mathrm{cm}^2.$$

Tento obsah je rovný polovici súčinu dĺžky strany AB a vzdialenosti v bodu D od tejto strany, $\mathrm{S}(ABD) = \frac{1}{2}\,|AB| \cdot v$, takže

$$v = \frac{2 \cdot \mathrm{S}(ABD)}{|AB|} = \frac{2 \cdot 42\,\mathrm{cm}^2}{7\,\mathrm{cm}} = 12\,\mathrm{cm}.$$

Pokyny:

4 body za obsah trojuholníka ABD; 2 body za hľadanú vzdialenosť a kvalitu komentára.

Poznámka:

Úvahy a vzťahy z prvej časti uvedeného riešenia možno zapísať v tvare $\mathrm{S}(ADE) : \mathrm{S}(CDE) = \mathrm{S}(ABE) : \mathrm{S}(BCE)$, ekvivalentne ako $\mathrm{S}(BCE) : \mathrm{S}(CDE) = \mathrm{S}(ABE) : \mathrm{S}(ADE)$, pričom jedinou neznámou je $\mathrm{S}(ABE)$.

Tiež platí, že pomer obsahov trojuholníkov ABD a BCD je rovnaký ako pomer výšok trojuholníkov vzhľadom na spoločnú stranu BD, a ten je rovnaký ako pomer úsečiek $|AE| : |EC|$. Pritom $\mathrm{S}(BCD) = \mathrm{S}(BCE) + \mathrm{S}(CDE)$ poznáme zo zadania a pomer $|AE| : |EC|$ je odvodený na začiatku riešenia. Z toho je možné vyjadriť $\mathrm{S}(ABD)$.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2022