MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

1 Žiak si známkou z poslednej päťminútovky zlepšil celkový priemer z 2,6 na 2,5. Koľko päťminútoviek celkom písal? Určte všetky možnosti. (Možné známky sú 1, 2, 3, 4, 5.)

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Označme p počet známok pred poslednou písomkou a s ich súčet.

Posledná známka mohla byť 1 alebo 2, inak by sa celkový priemer naopak zhoršil. Tieto dva prípady ďalej rozoberieme:

- Ak bola posledná známka 1, je zadanie úlohy vyjadrené sústavou rovníc

$$\frac{s}{p} = 2{,}6 = \frac{13}{5},$$

$$\frac{s+1}{p+1} = 2{,}5 = \frac{5}{2},$$

po úprave

$$5s = 13p,$$

$$2s = 5p + 3.$$

Od prvej rovnice vynásobenej 2 odpočítame druhú rovnicu vynásobenú 5, a dostaneme tak

$$0 = 2 \cdot 13p - 5(5p + 3)$$

$$0 = 26p - 25p - 15)$$

$$p = 15,$$

z čoho ďalej

$$s = \frac{13p}{5} = \frac{13 \cdot 15}{5} = 39.$$

Tieto hodnoty sú pritom možné, napríklad pri 6 dvojkách a 9 trojkách. Žiak teda mohol celkom napísať $15+1$ čiže 16 písomiek.

- Ak bola posledná známka 2, je zadanie úlohy vyjadrené sústavou rovníc

$$\frac{s}{p} = 2{,}6 = \frac{13}{5},$$

$$\frac{s+2}{p+1} = 2{,}5 = \frac{5}{2},$$

po úprave

$$5s = 13p,$$

$$2s = 5p + 1.$$

Od prvej rovnice vynásobenej 2 odpočítame druhú rovnicu vynásobenú 5, a dostaneme tak

$$0 = 2 \cdot 13p - 5(5p + 1)$$

$$0 = 26p - 25 - 5)$$

$$p = 5,$$

z čoho ďalej

$$s = \frac{13p}{5} = \frac{13 \cdot 5}{5} = 13.$$

Tieto hodnoty sú pritom možné, napríklad pri 2 dvojkách a 3 trojkách. Žiak teda mohol celkom napísať $5 + 1$ čiže 6 písomiek.

Zhrnutím dostávame, že žiak mohol napísať 6 alebo 16 písomiek.

Poznámka:

Výpisy príkladov známok možno nahradiť konštatovaním, že súčet známok s daným počtom p môže zrejme nadobudnúť všetky celočíselné hodnoty s od p po $5p$.

Riešenie 2:

Označme p počet známok pred poslednou písomkou a s ich súčet.

a ukážeme, že (p, s) je jedna z dvojíc $(5, 13)$ alebo $(15, 39)$. Príklady možných známok pre tieto dvojice opakovať v druhom riešení už nebudeme.

Z vyjadrenia priemeru $\frac{s}{p}$ zlomkom v základnom tvare $\frac{13}{5}$ vyplýva, že číslo p je násobkom 5, teda $p = 5k$ pre vhodné kladné celé k. Z rovnosti $\frac{s}{p} = \frac{13}{5}$ potom máme $s = 13k$, teda podmienku na poslednú známku z môžeme zapísať rovnicou

$$2{,}5 = \frac{5}{2} = \frac{s+z}{p+1} = \frac{13k+z}{5k+1},$$

takže ekvivalentne

$$5(5k+1) = 2(13k+z),$$

$$25k + 5 = 26k + 2z,$$

$$2z = 5 - k.$$

Do úvahy teda prichádzajú iba nepárne k, a to 1 a 3.

- Ak $k = 1$, tak $2z = 5 - k = 5 - 1 = 4$, čiže $z = 2$, a z rovností $p = 5k$ a $s = 13k$ vychádza $p = 5$ a $s = 13$. Tieto hodnoty sú pritom možné, napríklad pri 2 dvojkách a 3 trojkách.
- Ak $k = 3$, tak $2z = 5 - k = 5 - 3 = 2$, čiže $z = 1$, a z rovností $p = 5k$ a $s = 13k$ vychádza $p = 15$ a $s = 39$. Tieto hodnoty sú pritom možné, napríklad pri 6 dvojkách a 9 trojkách.

Zhrnutím dostávame, že žiak mohol napísať 6 alebo 16 písomiek.

Poznámka:

Úvodnú úvahu o deliteľnosti možno pri predchádzajúcom postupe použiť aj neskôr. Predtým totiž môžeme zostaviť pre neznáme p, s, z sústavu rovníc

$$\frac{s}{p} = \frac{13}{5},$$

$$\frac{s+z}{p+1} = \frac{5}{2},$$

tú potom upraviť napríklad na tvar

$$5s = 13p,$$

$$2s + 2z = 5p + 5,$$

a až teraz využiť deliteľnosť, alebo ešte z posledných dvoch rovníc podobne ako v prvom riešení vylúčiť neznámu s. Vtedy dostaneme rovnicu

$$5 \cdot (2s + 2z) - 2 \cdot 5s = 5 \cdot (5p + 5) - 2 \cdot 13p,$$

čiže

$$10z = 25 - p.$$

Odtiaľ už vyplýva, že číslo p je nepárne, deliteľné 5 a menšie ako 25.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

Cestou prvého riešenia:

A1 Konštatovanie, že poslednou známkou z mohla byť jednotka alebo dvojka: 1 bod.

A2 Vyriešenie prípadov $z = 1$ a $z = 2$: 5 bodov za oba prípady, 3 body za jeden prípad. Ak chýbajú príklady možných známok, strhnite 1 bod (za jeden prípad aj celkom za oba).

Cestou druhého riešenia:

B1 Zdôvodnenie, že $p = 5k$ a $s = 13k$: 1 bod.

B2 Vyjadrenie z (alebo $2z$) pomocou k: 3 body

B3 Určenie oboch trojíc (p,s,z) a vylúčenie iných: 1 bod.

B4 Príklady možných známok pre určené dvojice (p,s): 1 bod.

Celkovo potom dajte maximum zo súčtu bodov za A1, A2 a súčtu bodov za B1, B2, B3, B4.

---

2 Nech reálne čísla a, b, c sú také, že platí $a+b+c=1$. Dokážte, že

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) \geq 0,$$

a určte všetky trojice (a,b,c), pre ktoré nastáva rovnosť.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Z danej podmienky vyplýva $a = 1-b-c$. Preto

$$a+bc = (1-b-c)+bc = (1-b)(1-c).$$

Analogicky prepíšeme aj zvyšné dva činitele. Preto

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = (1-b)(1-c)\cdot(1-c)(1-a)\cdot(1-a)(1-b)$$

$$= \big((1-a)(1-b)(1-c)\big)^2 \geq 0,$$

lebo druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná. Rovnosť nastáva práve v prípade

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 0,$$

t. j. práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel a, b, c rovné 1. Ak platí napríklad $a=1$, tak zadaná podmienka $a+b+c=1$ prejde na tvar $b+c=0$, takže ju spĺňajú práve tie dvojice (b,c), ktoré sú tvaru $(t,-t)$ pre vhodné reálne číslo t.

Vzhľadom na symetriu sú tak všetky hľadané trojice (a,b,c) práve tvarov $(1,t,-t)$ alebo $(t,1,-t)$ alebo $(t,-t,1)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Poznámka:

Opíšme dva iné vhodné spôsoby úprav činiteľov zadaného súčinu.

Pri prvom z nich využijeme rovnosť $a+b+c=1$ nasledovne:

$$a+bc = a\cdot 1+bc = a(a+b+c)+bc = a^2+ab+ac+bc = (a+b)(a+c).$$

Podobne $b+ca=(b+c)(b+a)$ a $c+ab=(c+a)(c+b)$, takže dokopy

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = (a+b)(a+c)\cdot(b+c)(b+a)\cdot(c+a)(c+b) = \big((a+b)(b+c)(c+a)\big)^2.$$

Odtiaľ vyplýva rovnaký záver ako v pôvodnom riešení, lebo napríklad $a+b=1-c$.

Pri druhom spôsobe dosadíme vyjadrenie $a=1-b-c$ do všetkých troch činiteľov:

$$a+bc = 1-b-c+bc = (1-b)(1-c),$$

$$b+ca = b+c-bc-c^2 = (b+c)(1-c),$$

$$c+ab = c+b-b^2-bc = (b+c)(1-b).$$

Vynásobením týchto troch rovností dostaneme

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = (1-b)(1-c)\cdot(b+c)(1-c)\cdot(b+c)(1-b) = \big((b+c)(1-b)(1-c)\big)^2.$$

Odtiaľ opäť vyplýva rovnaký záver ako v pôvodnom riešení, pretože $b+c=1-a$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A1 Úprava niektorého z činiteľov daného súčinu na súčin dvoch výrazov typu $1-a$ alebo $b+c$: 1 bod, 2 body dajte za takú úpravu všetkých troch činiteľov.

A2 Dôkaz nezápornosti daného súčinu: 2 body.

A3 Popis všetkých trojíc (a, b, c), pre ktoré je daný súčin rovný nule: 2 body, z toho 1 bod, ak je odvodená iba skupina podmienok typu $a = 1$ alebo $b + c = 0$, avšak chýba popis zodpovedajúcich trojíc (a, b, c), ako je zadaním úlohy vyžadované. Vyhovujúci je aj slovný popis, napríklad, že sú to práve tie trojice reálnych čísel, v ktorých je niektoré číslo 1 a súčet zvyšných dvoch čísel je 0. Za podmienky typu $a + bc = 0$ však žiadny bod neudeľujte.

Celkovo potom dajte súčet bodov za A1, A2, A3.

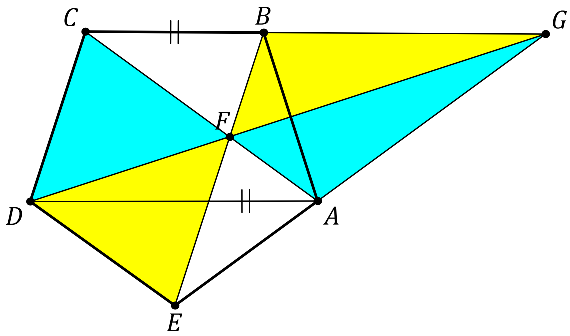
---

3 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ označme F priesečník uhlopriečok AC, BE a G priesečník predĺžených strán EA, CB. Ktorý zo štvoruholníkov $CDEF$ a $AFBG$ má väčší obsah?

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

Zo súmerností pravidelného päťuholníka (podrobne posúdených v riešení úlohy 5 z domáceho kola) vyplýva, že body D, F, G ležia v tomto poradí na jednej priamke a že platí $BC \parallel AD$. Dokopy dostávame, že F je priesečník uhlopriečok lichobežníka $GCDA$ so základňami GC a DA.



Vďaka rovnobežnosti DA a GC majú trojuholníky DAC a DAG zhodné výšky z vrcholov C a G na spoločnú stranu DA, preto pre ich obsahy platí $\mathrm{S}(DAC) = \mathrm{S}(DAG)$. Pritom

$$\mathrm{S}(DAC) = \mathrm{S}(DAF) + \mathrm{S}(DFC),$$

$$\mathrm{S}(DAG) = \mathrm{S}(DAF) + \mathrm{S}(AFG),$$

z čoho získavame rovnosť $\mathrm{S}(DFC) = \mathrm{S}(AFG)$.

Teraz si všimnime, že oba zadané štvoruholníky $CDEF$ a $AGBF$ sú súmerné podľa priamky DG, ktorá tak rozpoľuje obsah každého z nich. Preto z rovnosti $\mathrm{S}(DFC) = \mathrm{S}(AFG)$ po násobení 2 dostaneme $\mathrm{S}(CDEF) = \mathrm{S}(AGBF)$.

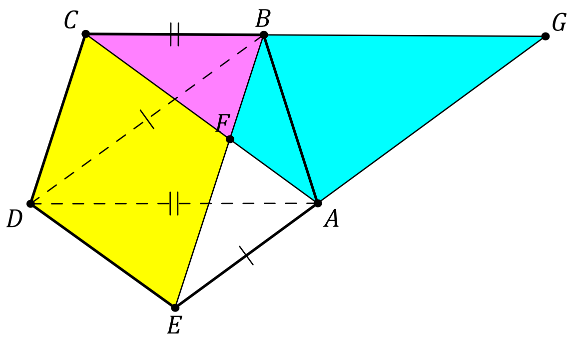
Štvoruholníky $CDEF$ a $AGBF$ teda majú rovnaký obsah.

Poznámka:

Z dôvodu symetrie sme namiesto dvojice trojuholníkov DFC a AFG mohli uvažovať dvojicu trojuholníkov DFE a BFG. Takéto obmeny ďalších riešení už spomínať nebudeme (ani v záverečných pokynoch na bodovanie). Dohodneme sa tiež, že zjavné dôsledky súmerností päťuholníka $ABCDE$ budeme ďalej uvádzať bez odkazov.

Riešenie 2:

Zadané štvoruholníky $CDEF$ a $AGBF$ doplníme tým istým trojuholníkom BCF postupne na štvoruholník $BCDE$ a trojuholník AGC. Označme a dĺžku strán daného päťuholníka, u dĺžku jeho uhlopriečok a v vzdialenosť medzi ľubovoľnou stranou a s ňou rovnobežnou uhlopriečkou.



Keďže $BCDE$ je lichobežník, platí $\mathrm{S}(BCDE) = \frac{1}{2}(a+u)v$. Vďaka rovnobežníku $AGBD$ má trojuholník AGC stranu GC dĺžky $|GB| + |BC| = u + a$ a výška na túto stranu má veľkosť v, teda $\mathrm{S}(AGC) = \frac{1}{2}(a + u)v$. Platí teda $\mathrm{S}(BCDE) = \mathrm{S}(AGC)$, z čoho dostávame $\mathrm{S}(CDEF) = \mathrm{S}(AFBG)$.

Riešenie 3:

Keďže $DB \parallel AG$ a $DA \parallel BG$, štvoruholník $DABG$ je rovnobežník, a pretože je súmerný podľa svojej uhlopriečky, je to kosoštvorec.

Keďže oba štvoruholníky $CDEF$ a $AGBF$ majú navzájom kolmé uhlopriečky, platí

$$S(CDEF) = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |FD|,$$

$$S(AFBG) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |GF|.$$

Priečka BF trojuholníka GDC je rovnobežná s jeho stranou CD, takže trojuholníky BFG a CDG sú rovnoľahlé, preto platí

$$\frac{|GB|}{|BC|} = \frac{|GF|}{|FD|},$$

Keďže $|GB| = |AD| = |EC|$ a $|BC| = |AB|$, dostávame

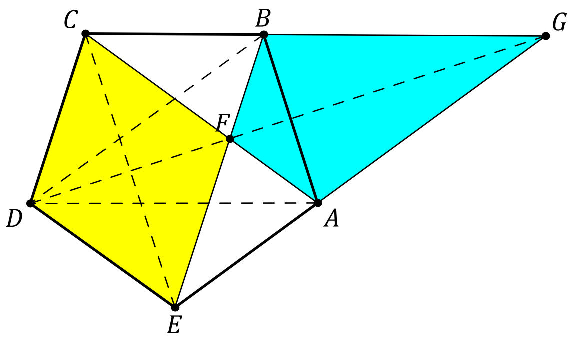
$$\frac{|EC|}{|AB|} = \frac{|GF|}{|FD|},$$

t. j.

$$|EC| \cdot |FD| = |AB| \cdot |GF|.$$

Z toho už vyplýva, že

$$S(CDEF) = S(AFBG).$$



Riešenie 4:

Keďže $DE \parallel CF$ a $DC \parallel EF$, štvoruholník $CDEF$ je rovnobežník, a pretože je súmerný podľa svojej uhlopriečky, je to kosoštvorec. Analogicky je aj $AGBD$ kosoštvorec.

Podľa riešenia úlohy D3 k úlohe 5 domáceho kola vieme, že v pravidelnom päťuholníku pre dĺžku strán a a dĺžku uhlopriečok u platí $u : a = a : (u-a)$ (tzv. zlatý rez), čo ďalej využijeme ako rovnosť $a^2 = (u-a)u$. Tú môžeme prepísať v tvare

$$|FC| \cdot |FE| = |BF| \cdot |BG|,$$

pretože z kosoštvorcov $CDEF$ a $AGBD$ vyplýva $|FC| = |FE| = a$ a $|BG| = u$, odkiaľ $|BF| = |BE| - |FE| = u - a$.

Keďže trojuholníka FBC má strany FC a BC rovnakej dĺžky a, je rovnoramenný, takže platí

$$|\sphericalangle EFC| = 180^\circ - |\sphericalangle BFC| = 180^\circ - |\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle FBG|.$$

Zhrnutím dostávame

$$\frac{1}{2} \cdot |FC| \cdot |FE| \cdot \sin|\sphericalangle EFC| = \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot |BG| \cdot \sin|\sphericalangle FBG|,$$

takže

$$S(EFC) = S(FGB),$$

a teda

$$S(CDEF) = S(AFBG).$$

Pokyny:

V prípade čiastočných riešení udeľujte body takto:

Pri postupe z prvého riešenia dajte 1 bod za prechod od porovnania obsahov $CDEF$ a $AGBF$ k porovnaniu ich polovíc, pri tomto postupe obsahov trojuholníkov CDF a AGF. Podľa úplnosti dôkazu ich rovnosti dajte 0 až 5 bodov, z toho 1 bod za východiskové pozorovanie, že $DA \parallel GC$.

Pri postupe z druhého riešenia dajte 2 body za prechod od porovnania obsahov $CDEF$ a $AGBF$ k ekvivalentnému porovnaniu obsahov štvoruholníka $BCDE$ a trojuholníka AGC. Podľa úplnosti dôkazu ich rovnosti dajte 0 až 4 body, z toho 1 bod za konštatovanie, že $BCDE$ je lichobežník, a 2 body za rovnosť $|GB| = u$.

Pri postupe z tretieho riešenia dajte 1 bod za vyjadrenie obsahov oboch štvoruholníkov použitím súčinu dĺžok ich uhlopriečok a 0 až 5 bodov za úplnosť dôkazu ich rovnosti, z toho 2 body za záver spojený s priečkou BF trojuholníka GCD a 2 body za zhodnosť úsečky GB s uhlopriečkami päťuholníka.

Pri postupe zo štvrtého riešenia dajte 1 bod za prechod od porovnania obsahov $CDEF$ a $AGBF$ k porovnaniu ich polovíc, pri tomto postupe obsahov trojuholníkov EFC a GBF. Za úplnosť dôkazu ich rovnosti dajte 0 až 5 bodov, z toho 3 body za prepis rovnosti $u : a = a : (u - a)$ z textu domáceho kola na tvar $|FC| \cdot |FE| = |BF| \cdot |BG|$, 1 bod za zhodnosť uhlov EFC a GBF a 1 bod za dvojaké použitie vzorca pre obsah trojuholníka pomocou sínusu zvieraného uhla.

Čiastkové bodové zisky z rôznych postupov nemožno sčítať, celkovo dajte maximálny z nich. Len za uhádnutie odpovede žiadny bod neudeľujte.

Zjavné dôsledky osových súmerností pravidelného päťuholníka nie je nutné dokazovať (ani spomínať, že sú známe z domáceho kola). To isté sa týka aj pravidla o lichobežníku z prvého riešenia.

---

4 Štyri navzájom rôzne prvočísla p, q, r, s spĺňajú rovnosť

$$72 + p = q \cdot r \cdot s.$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu p.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Ak je jedno z prvočísel q, r, s rovné 2, pravá strana danej rovnosti je párna, a teda podľa ľavej strany je aj prvočíslo p párne, teda $p = 2$, čo je vylúčené pre podmienku rôznosti jednotlivých prvočísel.

Podobne žiadne z prvočísel q, r, s nie je rovné 3, lebo súčet na ľavej strane by potom bol násobkom 3, a teda aj prvočíslo p by muselo byť rovné 3.

Vieme teda, že všetky tri prvočísla q, r, s sú väčšie ako 3. Tri najmenšie takéto prvočísla sú 5, 7 a 11, takže platí

$$q \cdot r \cdot s \geq 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385,$$

odkiaľ vyplýva

$$p = q \cdot r \cdot s - 72 \geq 385 - 72 = 313.$$

Ľahko ukážeme, že číslo 313 je prvočíslo, a že je to teda hľadaná najmenšia možná hodnota p (na pravej strane zadanej rovnosti sú potom menšie prvočísla 5, 7 a 11).

Keby číslo 313 nebolo prvočíslo, bolo by vďaka odhadu $18^2 = 324 > 313$ deliteľné niektorým z prvočísel od 2 do 17. Deliteľnosť prvočíslami 2, 3 a 5 je však vylúčená podľa známych kritérií a pre zvyšné prvočísla 7, 11, 13 a 17 ľahko overíme, že príslušné delenia vyjdú so zvyškami:

$$313 = 7 \cdot 44 + 5 = 11 \cdot 28 + 5 = 13 \cdot 24 + 1 = 17 \cdot 18 + 7.$$

(Pri overovaní si možno ušetriť prácu úvahou: Keďže $72 = 2^3 \cdot 3^2$, z rovnosti $72 + 313 = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ vyplýva, že číslo 313 nie je deliteľné 2, 3, 5, 7 ani 11. Stačí preto delením overiť nedeliteľnosť čísla 313 prvočíslami 13 a 17.)

Pokyny:

V prípade čiastočných riešení udeľte po 1 bode za každé z oboch vysvetlení, že žiadne z prvočísel q, r, s nie je 2 ani 3, ďalšie 3 body za nájdenie odhadu $p \geq 313$ a konečne 1 bod za overenie, že 313 je prvočíslo (riešiteľ pritom môže konštatovať, že vylúčil deliteľnosť všetkými prvočíslami od 2 do 17, čo však nie je nutné zaznamenávať).

Pokiaľ riešiteľ hodnotu 313 určí dosadením prvočísel 5, 7 a 11 do pravej strany rovnosti a možnosť $p < 313$ nevylúči, dajte iba 1 bod.
