MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh krajského kola kategórie B

1 Nech a a b, kde $a > b$, sú kladné celé čísla, ktorých súčet je osemnásobkom ich najväčšieho spoločného deliteľa. Dokážte, že číslo $a^2 - b^2$ alebo jeho trojnásobok je druhou mocninou celého čísla.

(Zdeněk Pezlar, Michal Pecho)

Riešenie 1:

Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b. Potom platí $a = du$ a $b = dv$, kde kladné celé čísla u a v sú nesúdeliteľné a pritom podľa zadania platí $u > v$.

Podľa zadania $a + b = 8d$, čiže $du + dv = 8d$, po vydelení kladným číslom d dostaneme $u + v = 8$. Dvojica (u, v) kladných celých čísel so súčtom 8 a vlastnosťou $u > v$ je preto jedna z dvojíc $(7, 1)$, $(6, 2)$, $(5, 3)$, prostrednú z nich však rovno vylúčime pre súdeliteľnosť čísel 6 a 2.

Rozoberme oba prípady:

- Pre dvojicu $(7, 1)$ vychádza

$$a^2 - b^2 = (7d)^2 - (1d)^2 = 49d^2 - d^2 = 48d^2 = 3 \cdot (4d)^2,$$

  takže

$$3(a^2 - b^2) = 3^2 \cdot 3 \cdot (4d)^2 = (12d)^2.$$

- Pre dvojicu $(5, 3)$ vychádza

$$a^2 - b^2 = (5d)^2 - (3d)^2 = 25d^2 - 9d^2 = 16d^2 = (4d)^2.$$

Tvrdenie úlohy tak platí v oboch prípadoch, ktoré prichádzali do úvahy.

Poznámka:

Z rovnosti $(ka)^2 - (kb)^2 = k^2(a^2 - b^2)$ pre každé celé k také, že $k > 1$, si možno všimnúť, že číslo $(ka)^2 - (kb)^2$ alebo jeho trojnásobok je druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď je také číslo $a^2 - b^2$. Preto stačí tvrdenie úlohy dokázať pre prípad, keď čísla a a b sú nesúdeliteľné, t. j. keď platí $d = 1$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 Vyjadrenie $a = du$, $b = dv$: 1 bod.
- B1 Odvodenie rovnosti $u + v = 8$: 3 body.
- C1 Dôkazy tvrdenia úlohy pre každý z jednotlivých prípadov, keď platí $u + v = 8$: 0 až 3 body podľa stupňa úplnosti.
- D1 Zdôvodnenie, že je možné predpokladať $d = 1$ (a nezavádzať tak čísla u, v, t. j. namiesto nich písať a, b): 2 body.

Celkovo potom dajte súčet maxima z počtov bodov z A1, z B1 a z C1 a počtu bodov z D1.

---

2 Predpokladajme, že reálne čísla x, y, z spĺňajú nerovnosť

$$(x + y + z)^2 > 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dokážte, že čísla x, y, z sú buď všetky kladné, alebo všetky záporné.

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Nerovnosť, ktorú čísla x, y, z spĺňajú, najprv algebraicky upravíme:

$$(x + y + z)^2 > 2(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2,$$
$$2xy + 2zx > x^2 + y^2 + z^2 - 2yz,$$

$$2x(y+z) > x^2 + (y-z)^2 \geq 0.$$

Keďže pôvodná nerovnosť je zrejme v premenných x, y, z symetrická, jej dôsledkom sú tri nerovnosti

$$x(y+z) > 0,$$
$$y(z+x) > 0,$$
$$z(x+y) > 0.$$

Preto sú všetky tri čísla x, y, z rôzne od nuly. Keby teda dokazovaný záver neplatil, nastal by jeden z dvoch nasledujúcich prípadov.

- Dve z čísel x, y, z sú kladné a zvyšné je záporné.
- Dve z čísel x, y, z sú záporné a zvyšné je kladné.

V oboch týchto prípadoch však jedna z týchto nerovností neplatí: Ak totiž vynásobíme súčet dvoch kladných (resp. záporných) čísel číslom záporným (resp. kladným), dostaneme vo výsledku záporné číslo. Tento spor už dokazuje tvrdenie úlohy.

Riešenie 2:

Všimnime si na úvod, že zadaná nerovnosť sa nezmení, ak trojicu čísel (x, y, z) do nej dosadíme v akomkoľvek inom poradí. To isté platí pri zámene trojice (x, y, z) trojicou $(-x, -y, -z)$.

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že tvrdenie úlohy neplatí. Majme tak čísla x, y, z, ktoré spĺňajú zadanú nerovnosť, avšak nie je pravda, že všetky tri sú kladné, ani to, že všetky tri sú záporné. Bez ujmy na všeobecnosti nech $x \geq y \geq z$. Potom $x \geq 0$ a $z \leq 0$. Platí teda $x \geq y \geq 0 \geq z$ alebo $x \geq 0 \geq y \geq z$. Stačí uvažovať iba prvú možnosť, lebo od tej druhej prejdeme k prvej, keď trojicu (x, y, z) vymeníme za trojicu $(-z, -y, -x)$.

Nech teda $x \geq y \geq 0 \geq z$. Vzhľadom na to zadanú nerovnosť upravíme nasledovne:

$$(x+y+z)^2 > 2(x^2+y^2+z^2),$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx > 2x^2+2y^2+2z^2,$$
$$0 > x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx,$$
$$0 > (x-y)^2+z^2-2yz-2zx.$$

Všetky členy na pravej strane sú však nezáporné – prvé dva ako druhé mocniny, zvyšné dve nerovnosti $-2yz \geq 0$ a $-2zx \geq 0$ platia vďaka nášmu predpokladu $x \geq y \geq 0 \geq z$. Tým je dôkaz sporom ukončený.

Riešenie 3:

Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$(x+y+z)^2 > 2(x^2+y^2+z^2),$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx > 2x^2+2y^2+2z^2,$$
$$4yz > x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz,$$
$$4yz > (x-y-z)^2.$$

Z toho vďaka nerovnosti $(x-y-z)^2 \geq 0$ vyplýva $yz > 0$, takže čísla y a z sú buď obe kladné, alebo obe záporné. Vzhľadom na symetriu východiskovej nerovnosti to isté platí aj pre zvyšné dvojice čísel x a z, resp. x a y, takže buď sú všetky tri čísla x, y, z kladné, alebo sú všetky tri záporné.

Riešenie 4:

Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$(x+y+z)^2 > 2(x^2+y^2+z^2),$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx > 2x^2+2y^2+2z^2,$$
$$0 > x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zy,$$
$$0 > x^2-2(y+z)x+(y-z)^2,$$

čo je kvadratická nerovnica premennej x, ktorá má podľa predpokladu riešenie. Preto grafom kvadratickej funkcie f definovanej

$$f(x) = x^2-2(y+z)x+(y-z)^2$$

je taká parabola, ktorej časť leží pod vodorvnou osou. Príslušná kvadratická rovnica $f(x) = 0$ má preto dva rôzne korene, teda jej diskriminant D je kladný:

$$0 < D = 4(y+z)^2 - 4(y-z)^2 = 16yz.$$

Odtiaľto vyplýva $yz > 0$. Podobne ako v predchádzajúcom riešení zo symetrie vyplýva taktiež $xy > 0$ a $zx > 0$, teda všetky tri čísla x, y, z majú rovnaké znamienka.

Poznámka:

Ukážme, ako niektoré poznatky z predchádzajúcich riešení, a vlastne aj celý nový dôkaz, vyplývajú z ďalších úvah o vyššie spomínanej parabole, ktorá je grafom kvadratickej funkcie f. Tá vďaka zadanému predpokladu nadobúda aspoň jednu zápornú hodnotu.

Doplnením na štvorec získame vyjadrenie, ktoré sme predtým využili v treťom riešení, teda

$$f(x) = (x - y - z)^2 - 4yz = (x - (y + z))^2 - 4yz.$$

Z neho vidíme, že funkcia f má najmenšiu hodnotu v bode $y + z$, a to $-4yz$. Z nerovnosti $f(y + z) < 0$ preto vyplýva, rovnako ako z nerovnosti $D > 0$ vo štvrtom riešení, nerovnosť $yz > 0$. Preto y a z sú nenulové čísla s rovnakým znamienkom, ktoré tak má aj číslo $y + z$. Keďže navyše platí

$$f(0) = (-y - z)^2 - 4yz = (y - z)^2 \geq 0,$$

číslo x s vlastnosťou $f(x) < 0$ má (vďaka polohe paraboly) rovnaké znamienko ako číslo $y + z$, a teda (tu bez úvah o symetrii) ako aj obe čísla y a z, ako sme mali dokázať.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne.

- A1 Odvodenie nerovnosti typu $x(y + z) > 0$: 3 body.
- B1 Zdôvodnené usporiadanie typu $x \geq y \geq 0 \geq z$ pri dôkaze sporom: 2 body.
- B2 Úprava nerovnosti na tvar typu $2x(y + z) > x^2 + (y - z)^2$: 2 body.
- C1 Úprava nerovnosti na tvar typu $(x - (y + z))^2 - 4yz < 0$: 3 body.
- D1 Odvodenie nerovnosti typu $xy > 0$: 4 body.

Celkovo potom dajte maximálnu hodnotu z počtu bodov z A1, zo súčtu bodov z B1 a B2, z počtu bodov z C1, a z počtu bodov z D1.

---

3 Na stranách AB a BC daného trojuholníka ABC ležia postupne také body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokážte, že $|AE| = |BE|$.

(Patrik Bak)

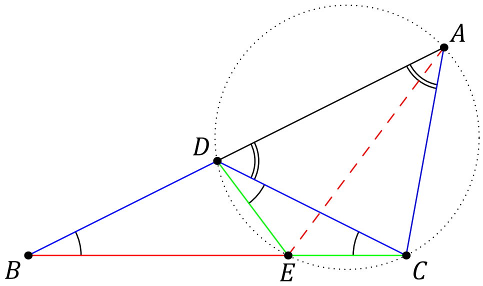
Riešenie 1:

Nech $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Z rovnoramenných trojuholníkov BCD a CDE tak postupne máme

$$\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CDE|.$$

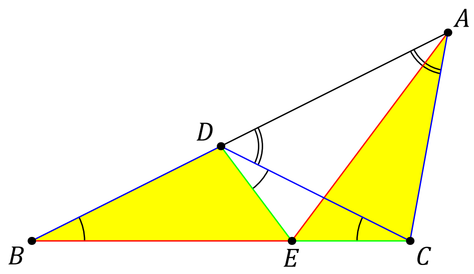
Dokazovaná rovnosť $|AE| = |BE|$ bude platiť práve vtedy, keď bude platiť aj $|\sphericalangle EAB| = \beta$, čiže $|\sphericalangle EAD| = \beta$. To vďaka rovnosti $|\sphericalangle ECD| = \beta$ nastane práve vtedy, keď štvoruholník $ADEC$ bude tetivový. Túto jeho vlastnosť dokážeme dopočítaním niekoľkých ďalších uhlov.

Keďže ADC je vonkajší uhol trojuholníka BCD, platí $|\sphericalangle ADC| = 2\beta$. Preto z rovnoramenného trojuholníka ADC vyplýva rovnosť $|\sphericalangle CAD| = 2\beta$. Výpočtom tretieho uhla v trojuholníku CDE dostávame $|\sphericalangle DEC| = 180° - 2\beta$. Vidíme, že $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DEC| = 180°$, čo znamená, že $ADEC$ je naozaj tetivový štvoruholník.



Riešenie 2:

Rovnosť $|AE| = |BE|$ dostaneme zo zhodnosti trojuholníkov AEC a BED. V nich podľa zadania platí $|AC| = |BD|$ a $|EC| = |ED|$. Preto vďaka vete *sus* stačí overiť rovnosť $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EDB|$.



Keďže ADC je vonkajší uhol trojuholníka BCD, platí $|\sphericalangle ADC| = 2\beta$. Preto z rovnoramenného trojuholníka ADC vyplýva rovnosť $|\sphericalangle CAD| = 2\beta$. Tak z trojuholníka ABC podľa rovností $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAD| = 2\beta$ platí

$$|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle BCA| = 180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 3\beta.$$

Podobne z priameho uhla pri vrchole D vzhľadom na vzťahy $|\sphericalangle CDE| = \beta$ a $|\sphericalangle ADC| = 2\beta$ vyplýva

$$|\sphericalangle EDB| = 180^\circ - |\sphericalangle CDE| - |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - 3\beta.$$

Tým je potrebná rovnosť $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EDB|$ dokázaná.

Riešenie 3:

Rovnoramenné trojuholníky BCD a DCE so spoločným uhlom pri krajnom bode C ich základní sú podobné, platí teda

$$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|DC|}.$$

Použitím tejto rovnosti a rovnosti $|AC| = |DC|$ zo zadania dostávame

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{|EC|}{|AC|}.$$

Trojuholníky ABC a EAC sú teda tiež podobné, a to podľa vety *sus*, pretože pri vrchole C majú spoločný vnútorný uhol. Táto podobnosť spolu so zhodnosťou uhlov pri základni AD rovnoramenného trojuholníka ADC vedie k rovnostiam

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADC|.$$

Rovnoramenný trojuholník BCD má tak pri svojom hlavnom vrchole D vonkajší uhol ADC zhodný s vonkajším uhlom AEC trojuholníka BEA pri vrchole E. Keďže tieto dva trojuholníky majú navyše pri vrchole B spoločný vnútorný uhol, s[podobné, takže ABE je tiež rovnoramenný, a to s hlavným vrcholom E. Z toho už vyplýva $|AE| = |BE|$.

Poznámka:

Kľúčový poznatok posledného riešenia, t. j. zhodnosť uhlov ADC a AEC, je zrejme ekvivalentná s tým, že štvoruholník $ADEC$ je tetivový. Overenie tejto vlastnosti štvoruholníka $ADEC$ sme v prvom riešení podali odlišným postupom.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne.

Cestou prvého riešenia:

- A0 Pozorovanie, že dokazovaná rovnosť vyplýva zo zhodnosti uhlov ABE a EAB: 0 bodov.
- A1 Odvodenie, že dokazovaná rovnosť vyplýva zo zhodnosti uhlov EAD a ECD alebo z tetivovosti štvoruholníka $ADEC$: 2 body.
- A2 Dôkaz niektorej z rovností $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DEC| = 180^\circ$ alebo $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BED|$ alebo $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ADE| = 180^\circ$ alebo $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle EDC|$: 0 až 3 body podľa úplnosti.
- A3 Úplný dôkaz tetivovosti štvoruholníka $ADEC$: 4 body.

Cestou druhého riešenia:

- B1 Pozorovanie, že dokazovaná rovnosť vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov AEC a BED: 2 body.
- B2 Dôkaz zhodnosti uhlov ECA a EDB: 0 až 3 body podľa úplnosti.
- B3 Úplný dôkaz zhodnosti trojuholníkov AEC a BED: 4 body.

Cestou tretieho riešenia:

- C1 Dôkaz podobnosti trojuholníkov ABC a EAC: 3 body.

C2 Dôkaz zhodnosti uhlov ADC a AEC: 4 body.

C3 Dokončenie dôkazu: 0 až 2 body podľa úplnosti.

Celkovo potom dajte maximum z týchto hodnôt:

- súčet bodov z A1 a maxima z bodov z A2 a z A3;
- súčet bodov z B1 a maxima z bodov z B2 a z B3;
- súčet maxima z bodov z C1 a z C2 a počtu bodov z C3;
- súčet bodov z A1 a C2.

---

4 Koľko 33-ciferných čísel deliteľných 3 neobsahuje vo svojom zápise cifru 3? Výsledok zapíšte v tvare súčinu mocnín prvočísel.

(Eliška Macáková, Patrik Bak)

Riešenie:

Cifry pre vyhovujúce čísla budeme postupne vyberať zľava doprava. Prvá z nich nesmie byť rovná 0 ani 3, teda to môže byť ktorákoľvek cifra z osemprvkovej množiny $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Každú ďalšiu cifru potom vyberáme z deväťprvkovej množiny $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Predpokladajme teraz, že už sme vybrali všetky cifry okrem tej poslednej na mieste jednotiek. Pripomeňme, že prirodzené číslo je deliteľné 3 práve vtedy, keď je deliteľný 3 jeho ciferný súčet. Aby teda bolo výsledné číslo deliteľné 3, posledná (zatiaľ nevybraná) cifra už má jednoznačne určený zvyšok po delení 3.

Ak preto rozdelíme 9 možných cifier pre miesto jednotiek do troch skupín podľa ich zvyšku po delení 3, z ich výpisu $\{0, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7\}$ a $\{2, 5, 8\}$ vidíme, že na výber poslednej cifry máme vždy práve 3 možnosti.

Celkovo dochádzame (použitím pravidla súčinu) k záveru, že pre hľadaný počet s 33-ciferných čísel deliteľných 3 neobsahujúcich cifru 3 platí

$$s = 8 \cdot 9^{31} \cdot 3 = 2^3 \cdot \left(3^2\right)^{31} \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^{63}.$$

Poznámka:

Všimnime si, že pri našom postupe nemusíme ako poslednú vyberať cifru na mieste jednotiek – akákoľvek pozícia okrem tej prvej funguje rovnako dobre. Ak by sme však ako poslednú vyberali prvú cifru zľava, nedalo by sa pravidlo súčinu priamo použiť (niekedy by sme mali 2, niekedy 3 možnosti).

Poznámka:

K správnemu výsledku je možné dôjsť aj na základe poznatku, že práve tretina z 33-ciferných čísel neobsahujúcich cifru 3 (iné čísla až do konca poznámky neuvažujeme) je deliteľná 3. Tento poznatok *nemožno vyhlásiť za zrejmý* a musí byť v riešení dokázaný, napríklad v tejto forme: *Ak rozdelíme všetky* 33*-ciferné čísla do troch skupín podľa ich zvyšku po delení* 3*, budú počty čísel vo všetkých troch skupinách rovnaké.*. Naozaj, každé 33-ciferné číslo dostaneme z 32-ciferného čísla pripísaním jednej cifry sprava. Z rozdelenia všetkých možných takto pripisovaných cifier do trojíc $\{0, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7\}$ a $\{2, 5, 8\}$ potom vyplýva, že ľubovoľné 32-ciferné číslo uvedeným spôsobom prispeje 3 číslami do každej z troch skupín 33-ciferných čísel, ktoré po delení dávajú rovnaký zvyšok. Preto tieto tri skupiny naozaj majú rovnaký počet prvkov (rovný teda trojnásobku počtu všetkých 32-ciferných čísel, ktorých je $8 \cdot 9^{31}$).

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne.

Cestou vzorového riešenia:

A1 Stratégia počítania možností (nezávislých) výberov jednotlivých cifier 33-ciferného čísla s výsledkami 1-krát 8 a 32-krát 9: 1 bod.

A2 Zdôvodnenie, že kvôli požadovanej deliteľnosti 3 môžeme prvých 32 cifier vybrať akokoľvek a pre poslednú cifru na mieste jednotiek potom máme vždy 3 možnosti: 3 body.

A3 Použitie pravidla súčinu (nie je ho nutné spomínať) pre záver z A2: 1 bod.

Postupom z druhej poznámky:

B1 Určenie počtu $8 \cdot 9^{32}$ všetkých 33-ciferných čísel bez cifry 3: 2 body.

B2 Dôkaz tvrdenia, že práve tretina z 33-ciferných čísel bez cifry 3 je deliteľná 3: 0 až 3 body podľa úplnosti.

Iné:

C1 Akékoľvek určenie hľadaného počtu, ktorý však nie je upravený na požadovaný tvar: 1 až 5 bodov podľa úplnosti zdôvodnenia, ktoré musí byť v súlade s predchádzajúcimi pokynmi, pritom 1 bod dajte za správny počet bez akéhokoľvek zdôvodnenia, napríklad pri konštatovaní, že čísel so zvyškom 0 je zrejme práve toľko ako čísel so zvyškom 1 aj čísel so zvyškom 2.

Záverom:

D1 Úprava úplne odvodeného počtu v nehotovej forme na požadovaný súčin mocnín prvočísel: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet počtu bodov z D1 a maxima zo súčtu bodov z A1, z A2 a z A3, zo súčtu bodov z B1 a B2 a z počtu bodov z C1.

Ak riešiteľ predpokladá, že 33-ciferný zápis 33-ciferného čísla môže začínať nulou, dajte mu najviac 2 body.