MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

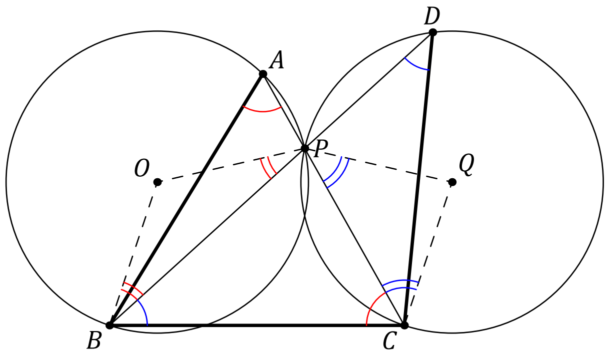
4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P priesečník jeho uhlopriečok a O, Q stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom APB a DPC. Dokážte, že štvoruholník $OBCQ$ je rovnobežník.

(Patrik Bak)

Riešenie:

V prvej časti riešenia dokážeme, že úsečky BO a CQ ležia v polrovine BCP a sú rovnobežné, v druhej časti ukážeme, že tieto úsečky majú rovnakú dĺžku. Dokopy to už bude znamenať, že $OBCQ$ je rovnobežník.

Rovnoramenné trojuholníky ABC, BCD majú pri svojich základniach AC, resp. BD ostré vnútorné uhly, ktorých veľkosť označíme α, resp. β. Tieto uhly sú na obrázku vyznačené jedným oblúčikom. Ako hneď zdôvodníme, dvoma oblúčikmi zodpovedajúcej farby sú vyznačené uhly veľkosti $90° - \alpha$, resp. $90° - \beta$.



Keďže trojuholník ABP má pri vrchole A ostrý uhol α, leží stred O jemu opísanej kružnice v polrovine BPA a konvexný stredový uhol POB má veľkosť 2α. Preto v rovnoramennom trojuholníku BPO majú uhly pri vrcholoch B, P avizovanú veľkosť $90° - \alpha$. Analogicky sa dokáže, že stred Q leží v polrovine CPD a v rovnoramennom trojuholníku CPQ majú uhly pri vrcholoch C, P veľkosť $90° - \beta$.

Keďže ostré uhly OBP a CBP ležia na odlišných stranách od spoločného ramena BP, je uhol OBC s vnútorným bodom P konvexný, leží tak v polrovine BCP a má navyše veľkosť

$$|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle OBP| + |\sphericalangle CBP| = (90° - \alpha) + \beta.$$

Analogicky v polrovine BCP leží tiež uhol QCB a má veľkosť $(90° - \beta) + \alpha$. Dokopy vychádza

$$|\sphericalangle OBC| + |\sphericalangle QCB| = 180°,$$

a s prvou časťou riešenia sme tak hotoví.

Rovnosť $|OB| = |QC|$ dokážeme použitím rozšírenej sínusovej vety pre trojuholníky ABP a CDP. Tie sa totiž zhodujú vo veľkosti uhlov pri spoločnom vrchole P aj v dĺžke protiľahlých strán AB a CD, takže platí

$$2 \cdot |OB| = \frac{|AB|}{\sin |\sphericalangle APB|} = \frac{|CD|}{\sin |\sphericalangle CPD|} = 2 \cdot |QC|.$$

---

5 Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je číslo

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nejakého celého čísla.

(Tomáš Jurík)

Riešenie 1:

- Ak n je záporné, tak $2^n + n^2$ nie je celé číslo, tobôž nie druhá mocnina celého čísla.
- Ak $n = 0$, tak $2^n + n^2 = 1 + 0 = 1 = 1^2$, čo vyhovuje.
- Ak $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tak $2^n + n^2 \in \{3, 8, 17, 32, 57\}$, žiaden z týchto čísel však nie je druhá mocnina celého čísla.

- Ak $n = 6$, tak $2^n + n^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$, čo vyhovuje.
- Nech $n \geq 7$. Dokážeme sporom, že takéto n nevyhovuje.
  Nech teda $2^n + n^2 = m^2$, pričom m je celé číslo, o ktorom môžeme predpokladať, že je kladné, a teda podľa tejto rovnosti väčšie ako n. Podľa parity n rozlíšime dva prípady.

  a) Nech n je nepárne.
  Vtedy aj číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je nepárne. Upravme túto rovnosť na tvar

  $$2^n = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

  Vidíme, že obe kladné čísla $m+n$ a $m-n$ sú mocninami 2, pričom $m+n > m-n$, takže $m-n \mid m+n$. Teda $m-n$ delí aj číslo $(m+n)-(m-n)$ čiže $2n$, pričom však n je nepárny činiteľ, takže $4 \nmid m-n$. Číslo $m-n$ je však párne, (lebo čísla m, n sú nepárne), preto $m-n=2$, t. j. $m = n+2$. Z toho

  $$2^n + n^2 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4,$$

  a teda

  $$2^n = 4n + 4.$$

  My však matematickou indukciou ukážeme, že pre každé celé n, kde $n \geq 5$, platí $2^n > 4n + 4$, čo bude spor:

  1 Ak $n = 5$, tak $2^n = 32 > 24 = 4n + 4$.
  2 Ak pre nejaké n, kde $n \geq 5$, platí $2^n > 4n + 4$, tak

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(4n+4) = 8n + 8 > 4n + 8 = 4(n+1) + 4.$$

  b) Nech n je párne.
  Vtedy aj číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je párne. Nech $n = 2k$, pričom k je celé číslo, ktoré vďaka predpokladu $n \geq 7$ spĺňa nerovnosť $k \geq 4$. Dokážeme ďalej, že platia nerovnosti $(2^k)^2 < m^2 < (2^k + 2)^2$, z čoho vyplynie $2^k < m^2 < 2^k + 2$, a teda $m^2 = 2^k + 1$, čo bude spor s párnosťou m.
  Nerovnosti, ktoré sme sľúbili dokázať, majú tvar

  $$2^{2k} < 2^{2k} + (2k)^2 < 2^{2k} + 4 \cdot 2^k + 4.$$

  Ľavá nerovnosť je vďaka $(2k)^2 > 0$ triviálna, pravá nerovnosť je ekvivalentná nerovnosti

  $$2^k + 1 > k^2.$$

  Tú dokážeme pre každé celé k, kde ≥ 4, matematickou indukciou:

  1 Ak $k = 4$, tak $2^k + 1 = 17 > 16 = k^2$.
  2 Ak pre nejaké k, kde $k \geq 4$, platí $2^k + 1 > k^2$, tak

  $$2^{k+1} + 1 = 2(2^k + 1) - 1 > 2k^2 - 1 = k^2 + k^2 - 1 =$$
  $$= (k+1)^2 - 2k - 1 + k^2 - 1 = (k+1)^2 + k(k-2) - 2 > (k+1)^2.$$

Zhrnutím dostávame, že zadaniu vyhovujú práve čísla 0 a 6.

Riešenie 2:

Ak n je záporné, tak $2^n + n^2$ nie je celé číslo, tobôž nie druhá mocnina celého čísla.

Ak $n = 0$, tak $2^n + n^2 = 1 + 0 = 1 = 1^2$, čo vyhovuje.

Predpokladajme teda ďalej $n > 0$. Nech teda $2^n + n^2 = m^2$, pričom m je celé číslo, o ktorom môžeme predpokladať, že je kladné, a teda podľa tejto rovnosti väčšie ako n.

Upravme rovnicu $2^n + n^2 = m^2$ na súčinový tvar

$$2^n = (m-n)(m+n).$$

Druhý, a teda prvý činiteľ na pravej strane je kladný, oba preto musia byť mocniny dvoch. platí teda $m - n = 2^a$ a $m + n = 2^b$, pričom a, b sú celé čísla také, že $0 \leq a < b$. Odčítaním týchto dvoch vzťahov dostávame $2n = 2^b - 2^a$. Z toho je 2^a je párne, a teda $a > 0$. Vďaka vzťahu $2^n = 2^a \cdot 2^b$ potom platí $a + b = n$, takže

$$2(a+b) = 2n = 2^b - a^2.$$

Ukážeme, že v prípade $b \geq 6$ táto rovnosť nemôže nastať. Keďže z nerovnosti $a < b$ zrejme vyplýva $2(a+b) < 4b$ a na druhej strane zároveň $2^b - 2^a \geq 2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}$, stačí nám ukázať, že $4b < 2^{b-1}$. Použijeme na to matematickú indukciu:

1 Ak $b = 6$, tak $4b = 24 < 32 = 2^{b-1}$.

2 Ak pre nejaké b, kde $b \geq 6$, platí $4b < 2^{b-1}$, tak

$$4(b+1) = 4b + 4 < 4b + 4b = 2 \cdot 4b = 2 \cdot 2^{b-1} = 2^b.$$

Zvyšných 10 prípadov, keď platí $1 \leq a < b \leq 5$, vyskúšame priamo:

- Ak $a = 1$ a $b = 2$, tak $2(a+b) = 6 \neq 2 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 3$, tak $2(a+b) = 8 \neq 6 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 10 \neq 14 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 12 \neq 30 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 2$ a $b = 3$, tak $2(a+b) = 10 \neq 4 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 2$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 12 = 2^b - 2^a$.
  V tomto prípade $n = a + b = 6$, čo, ako ľahko vidieť, vyhovuje zadaniu.
- Ak $a = 2$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 14 \neq 28 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 3$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 14 \neq 8 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 3$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 16 \neq 24 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 4$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 18 \neq 16 = 2^b - 2^a$.

Zhrnutím dostávame, že zadaniu vyhovujú práve čísla 0 a 6.

---

6 Pri pokuse o kolonizáciu Marsu zaplavilo ľudstvo slnečnú sústavu 50 satelitmi, ktoré medzi sebou vytvorili 225 komunikačných línií (každá línia existuje medzi jednou dvojicou satelitov a žiadne dva satelity medzi sebou nemajú viac ako jednu líniu). Hovoríme, že trojica satelitov je *prepojená*, ak aspoň jeden z nich má vytvorené komunikačné línie s oboma ostatnými satelitmi. Určte najmenší a najväčší možný počet prepojených trojíc satelitov.

(Ján Mazák, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Nech S označuje množinu dotyčných satelitov, n ich počet (čiže $n = 50$) m počet komunikačných línií (čiže $m = 225$).

- O prepojenej trojici satelitov T a jej satelite s povieme, že s je *centrálny satelit* trojice T, ak je prepojený s oboma ostatnými satelitmi tejto trojice. Všimnime si, že každá prepojená trojica má buď jeden, alebo tri centrálne satelity.

  Definujme ešte *stupeň* d_s satelitu s ako počet komunikačných línií, ktoré má. Potom s je centrálnym satelitom v práve $\binom{d_s}{2}$ čiže $\frac{1}{2}d_s(d_s-1)$ prepojených trojiciach. Keďže každá prepojená trojica má nanajvýš 3 centrálne satelity, pre celkový počet P prepojených trojíc platí

  $$P \geq \frac{1}{3}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} = \frac{1}{6}\left(\sum_{s\in S} d_s^2 - \sum_{s\in S} d_s\right) \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{s\in S} d_s\right)^2 - \sum_{s\in S} d_s\right),$$

  pričom posledná nerovnosť vyplýva znerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom pre n-ticu čísel $(d_s : s \in S)$, ktorá je sama dôsledkom Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti

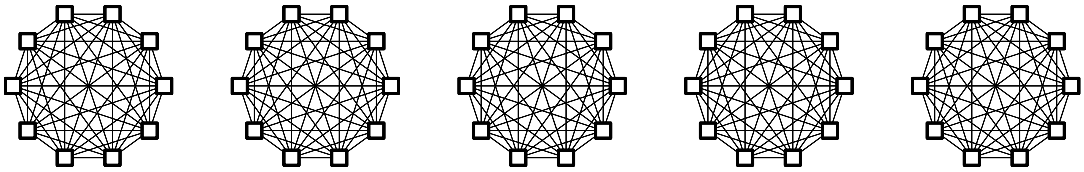
  $$\left(\sum_{s\in S}(1 \cdot d_s)\right)^2 \leq \left(\sum_{s\in S} 1^2\right) \cdot \left(\sum_{s\in S} d_s^2\right).$$

  Súčet $\sum_{s\in S} d_s$, ktorý sa v získanom odhade objavil, je však rovný dvojnásobku počtu m všetkých komunikačných línií, lebo je v ňom každá línia započítaná práve dvakrát (raz za každý jej koniec). Dvojakým dosadením $2m$ čiže 450 za $\sum_{s\in S} d_s$ spolu so vzťahom $n = 50$ už z odvodenej nerovnosti dostávame sľúbený odhad

  $$P \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{50} \cdot 450^2 - 450\right) = 600.$$

  Z nášho postupu navyše vyplýva, že rovnosť $P = 600$ nastane práve vtedy, keď všetkých P prepojených trojíc má po troch centrálnych satelitoch a zároveň všetkých 50 satelitov má ten istý stupeň, rovný teda, ako vieme, $2m/n$ čiže 9.

  To možno dosiahnuť, ak budú satelity prepojené ako na obrázku (všetkých 50 satelitov je rozdelených do 5 komunikačne izolovaných skupín po 10 navzájom prepojených satelitoch, majúcich teda naozaj ten istý stupeň 9).



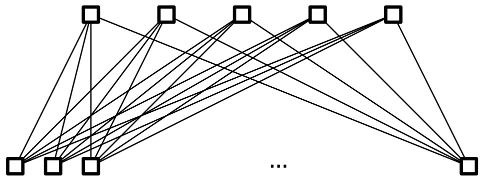
- Trojica satelitov je prepojená práve vtedy, keď obsahuje dve alebo tri komunikačné línie. Vyplatí sa preto pre každú možnú hodnotu i z $\{0, 1, 2, 3\}$ označiť t_i počet tých trojíc satelitov, medzi ktorými je práve i komunikačných línií. Tvrdíme, že platí

$$\sum_{i=0}^{3} i \cdot t_i = m \cdot (n-2).$$

  Obe strany tejto rovnosti totiž vyjadrujú celkový počet usporiadaných dvojíc (T, l), pričom T je trojica satelitov a l je komunikačná línia medzi dvoma satelitmi tejto trojice, lebo na ľavej strane započítavame pre jednotlivé T, v koľkých dvojiciach (T, l) dané T vystupuje, zatiaľ čo pravou stranou vyjadrujeme fakt, že každé l sa vyskytuje v $n-2$ dvojiciach tvaru (T, l).
  Z dokázanej rovnosti prepísanej na tvar $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = m(n-2)$ vyplýva odhad

$$t_2 + t_3 = \frac{m(n-2) - t_1 - t_3}{2} \leq \frac{m(n-2)}{2} = 5400,$$

  pritom želaná rovnosť $t_2 + t_3 = 5\,400$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $t_1 = t_3 = 0$. To možno dosiahnuť, ak budú satelity prepojené ako na obrázku (pričom naozaj máme $5 + 45$ čiže 50 satelitov a $5 \cdot 45$ čiže 225 komunikačných línií).



Zhruntím dostávame, že najmenší možný počet prepojených satelitov je 600 a najväčší 5400.

Poznámka:

Príklady potrebné v oboch častiach riešenia sú jediné možné.

Poznámka:

Odhad počtu P všetkých prepojených trojíc v druhej časti riešenia možno získať tiež použitím *Jensenovej nerovnosti* pre konvexnú funkciu f takú, že $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$:

$$P \geq \frac{1}{3}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} = \frac{n}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} \geq \frac{n}{3}\cdot\binom{\frac{1}{n}\sum_{s\in S} d_s}{2} = \frac{n}{3}\cdot\binom{2m/n}{2}.$$