MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

1 Na papieri je v rade vedľa seba napísaných 71 nenulových reálnych čísel. Platí, že každé číslo okrem prvého a posledného je o 1 menšie ako súčin jeho dvoch susedov. Dokážte, že prvé a posledné číslo sa rovnajú.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Dokážeme, že postupnosť 71 čísel na tabuli je periodická s periódou 5. Keďže $71-1$ čiže 70 je násobok 5, bude tým úloha vyriešená.

Označme ľubovoľných šesť po sebe napísaných čísel postupne a, b, c, d, e, f. Chceme teda dokázať, že $f=a$.

Zo zadania máme $b=ac-1$, čo možno vďaka podmienke $a\neq 0$ prepísať na

$$c=\frac{b+1}{a}.$$

Podobne ďalej dostaneme

$$d=\frac{c+1}{b}=\frac{\frac{b+1}{a}+1}{b}=\frac{a+b+1}{ab},$$

$$e=\frac{d+1}{c}=\frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}}=\frac{ab+a+b+1}{ab}\cdot\frac{a}{b+1}=\frac{(a+1)(b+1)a}{ab(b+1)}=\frac{a+1}{b},$$

$$f=\frac{e+1}{d}=\frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{a+b+1}{b}\cdot\frac{ab}{a+b+1}=a,$$

pričom krátenie číslami $b+1$ a $a+b+1$ bolo korektné, pretože ide o čitatele zlomkov, ktorými sme predtým vyjadrili nenulové čísla c a d.

Riešenie 2:

Iným spôsobom dokážeme, že pre každých šesť po sebe napísaných čísel a, b, c, d, e, f platí $a=f$. Odvodíme totiž rovnosť $abcde=bcdef$, z ktorej požadovaný záver vyplynie po vydelení oboch strán nenulovým súčinom $bcde$.

Vďaka zadanej podmienke (aplikovanej nižšie na podčiarknuté súčiny) môžeme písať

$$abcde=(\underline{ac})(\underline{bd})e=(b+1)(c+1)e=(b+1)(\underline{ce}+e)=(b+1)(d+e+1)=$$

$$=\underline{bd}+be+b+d+e+1=be+b+c+d+e+2.$$

Analogicky

$$bcdef=fedcb=(\underline{fd})(\underline{ec})b=(e+1)(d+1)b=(e+1)(\underline{bd}+b)=(e+1)(c+b+1)=$$

$$=\underline{ec}+eb+e+c+b+1=be+b+c+d+e+2.$$

Vidíme, že rovnosť $abcde=bcdef$ naozaj platí.

Poznámka:

Výpočet druhého súčinu $fedcb$ nebol nevyhnutný. Stačilo konštatovať, že podmienka zo zadania úlohy nezávisí od toho, v akom z oboch možných smerov napísaný rad čísel prečítame, a že výsledok pre prvý súčin $abcde$ závisí iba od štvorice (b, c, d, e) a je rovnaký ako pre štvoricu (e, d, c, b).

Poznámka:

Tvrdenie úlohy neplatí, ak pripustíme, že niektoré z napísaných čísel sa môžu rovnať nule. Príkladom je trebárs

$$(1,\underbrace{\underline{0,-1},\underline{0,-1},\dots,\underline{0,-1}}_{35\times}).$$

2 Hovoríme, že kladné celé číslo d je *spravodlivé*, ak počet 2021-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d, je rovnaký ako počet 2022-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d. Obsahuje množina $\{1, 2, \dots, 35\}$ viac tých čísel, ktoré sú spravodlivé, alebo tých, ktoré spravodlivé nie sú?

(Palindrómom nazývame prirodzené číslo, ktorého dekadický zápis sa číta zľava doprava rovnako ako sprava doľava.)

(David Hruška, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n označme $\overleftarrow{n}$ jeho zápis v opačnom poradí. Ten má zrejme rovnaký počet cifier ako n.

Každý 2021-ciferný palindróm má potom tvar $nc\overleftarrow{n}$, a každý 2022-ciferný $ncc\overleftarrow{n}$, kde n je 1010-ciferné číslo a c je cifra. Nech A_n a B_n sú množiny tých 2021-ciferných, resp. 2022-ciferných palindrómov, ktorých prvé 1010-číslie je n (a teda posledné 1010-číslie je $\overleftarrow{n}$). Všimnime si, že A_n aj B_n obsahujú po 10 prvkoch.

Ukážeme spravodlivosť každého čísla d, kde $d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $a, c \in \{0, \dots, 1010\}$ a $b \in \{0, 1, 2\}$, a to tak, že dokážeme, že počet násobkov takého d je pre každé prípustné n v oboch množinách A_n a B_n rovnaký.

Rozoberme prípady:

- Nech $d = 1$.
  Potom vyhovuje všetkých 10 palindrómov z A_n i všetkých 10 palindrómov z B_n
- Nech $d = 2^a 5^c$, pričom $\max(a, c) \in \{1, \dots, 1010\}$.
  Deliteľnosť čísel $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ takým číslom d je určená poslednými $\max(a, c)$ ciframi čísla $\overleftarrow{n}$, takže tvrdenie platí – buď sú násobkom d všetky čísla v A_n aj v B_n, alebo ním nie je žiadne číslo v A_n ani v B_n.
- Nech $d = 3^2 = 9$.
  Čísla $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ dávajú po delení 9 rovnaký zvyšok ako čísla $2n + c$, resp. $2n + 2c$. Zvyšky čísel tvaru c po delení 9 sú 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, zvyšky čísel tvaru $2c$ po delení 9 sú 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 0, Ak je teda n násobkom 9, obsahujú obe množiny A_n, B_n po dvoch násobkoch 9 čiže d, v opačnom prípade po jednom násobku 9 čiže d.
- Nech $d = 3^1 = 3$.
  Čísla $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ dávajú po delení 3 rovnaký zvyšok ako čísla $2n + c$, resp. $2n + 2c$. Zvyšky čísel tvaru c po delení 3 sú 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, zvyšky čísel tvaru $2c$ po delení 3 sú 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0. Ak je teda n násobkom 3, obsahujú obe množiny A_n, B_n po štyroch násobkoch 3 čiže d, v opačnom prípade po troch násobkoch 3 čiže d.
- Nech $d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $\max(a, c) \in \{1, \dots, 1010\}$ a $b \in \{1, 2\}$.
  Uvažujme najskôr číslo $e = 2^a 5^c$. Z dôkazu druhého prípadu vyplýva, že buď sú všetky čísla v A_n aj B_n násobky e, alebo žiadne z nich také nie je.
  Ak nastáva prvá možnosť, z výsledku tretieho, resp. štvrtého prípadu vyplýva, že obe množiny A_n aj B_n obsahujú rovnaký počet násobkov 3^b, a teda aj násobkov čísla $3^b \cdot e$ čiže d.
  Ak nastáva druhá možnosť, žiadna z množín A_n, B_n neobsahuje násobok e, a teda ani žiadny násobok d.

Spomedzi prvkov množiny $\{1, 2, \dots, 35\}$ má tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $a, c \in \{0, \dots, 1010\}$ a $b \in \{0, 1, 2\}$, práve týchto 18 čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32. Väčšina prvkov množiny zo zadania je teda spravodlivých.

Poznámka:

Dá sa ukázať, že žiadne zo zvyšných 17 čísel z množiny $\{1, 2 \dots, 35\}$ už nie je spravodlivé.

---

3 V ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme M stred strany BC a N stred oblúka BAC kružnice jemu opísanej. Ďalej označme l kružnicu s priemerom BC a D, E priesečníky l s osou uhla BAC. Body F, G ležia na kružnici l tak, že štvoruholník $DEFG$ je pravouholník. Dokážte, že body F, G, M, N ležia na jednej kružnici.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $|AB| < |AC|$ a že bod D leží na úsečke AE (ako máme na oboch obrázkoch). V iných prípadoch stačí vymeniť označenie bodov $B \leftrightarrow C$, resp. $D \leftrightarrow E$.

Označme ešte k kružnicu opísanú trojuholníku ABC a S jej priesečník s osou uhla BAC rôzny od A. Tento (tzv. Švrčkov) bod S je v našom prípade stredom kratšieho z oblúkov kružnice k medzi bodmi B a C, lebo podľa zadania je uhol BAC ostrý. Z definície bodu N potom vyplýva, že úsečka SN je priemerom kružnice k ležiacim na osi jej tetivy BC. Stred M tejto tetivy preto leží na úsečke SN tak, že platí $|MS| < |MN|$. Súčasne uhol BSC je tupý, čo vzhľadom na pravé uhly BDC a BEC znamená, že bod S leží vnútri úsečky DE. Keďže $DEFG$ je pravouholník, sú úsečky DF, EG (rovnako ako BC) priemery zadanej kružnice l, takže jej stred M je aj stredom úsečiek DF a EG.

Po týchto úvodných pozorovaniach uvedieme niekoľko spôsobov, ako riešenie dokončiť. Budeme v nich bez odkazov využívať známe vlastnosti mocnosti bodu ku kružnici a obvodových uhlov.

Riešenie 1:

Vyjdeme z toho, že bod M je spoločným vnútorným bodom tetív SN, BC kružnice k, ako aj tetív BC, DF, EG kružnice l. Platí tak reťazec rovností

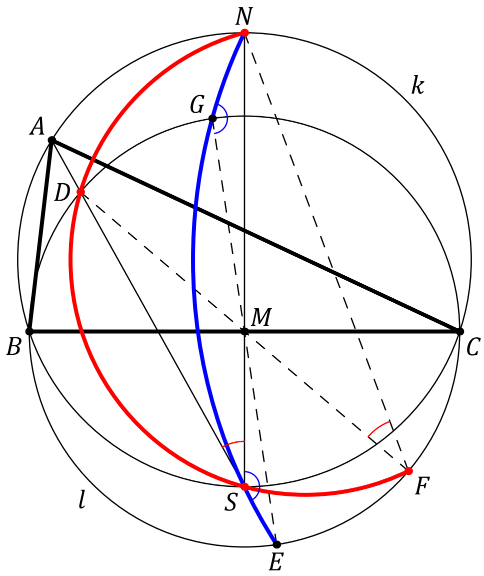
$$|MS| \cdot |MN| = |MB| \cdot |MC| = |MD| \cdot |MF| = |ME| \cdot |MG|.$$

Z toho vyplývajúca rovnosť prvého súčinu posledným dvom súčinom znamená práve to, že oba štvoruholníky $SDNF$ a $SENG$ (s priesečníkmi uhlopriečok v bode M) sú tetivové. Vďaka tomu platí (ako je farebne vyznačené na obrázku)

$$|\sphericalangle NFM| = |\sphericalangle NFD| = |\sphericalangle NSD|$$

a

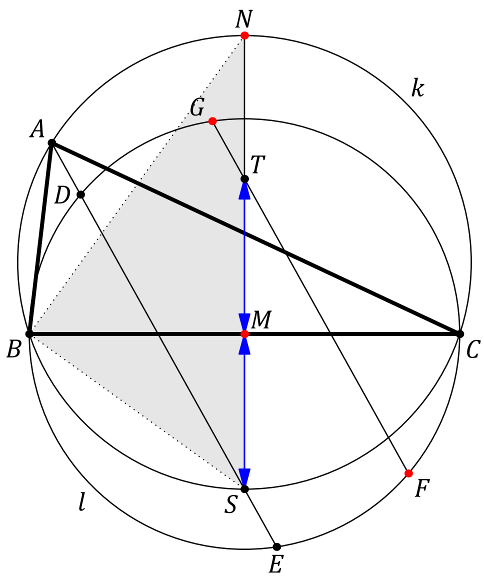
$$|\sphericalangle NGM| = |\sphericalangle NGE| = |\sphericalangle NSE|.$$



Keďže však $|\sphericalangle NSD| + |\sphericalangle NSE| = 180°$, máme aj $|\sphericalangle NFM| + |\sphericalangle NGM| = 180°$. Štyri body z poslednej rovnosti tak naozaj ležia na jednej kružnici (ako máme dokázať), ak ležia vrcholy F, G uhlov NFM, resp. NGM v opačných polrovinách s hraničnou priamkou MN. Táto priamka však pretína úsečku DE (v bode S), a teda aj úsečku FG (súmerne s ňou združenú podľa stredu M), čo sme chceli dokázať.

Riešenie 2:

Uvážime obraz T bodu S v súmernosti podľa stredu M, v ktorej sa tiež D zobrazí do F a E do G. Keďže podľa úvodnej časti bod S leží vnútri úsečky DE a platí $|MS| < |MN|$, leží bod T vnútri úsečiek FG a MN (pozri obrázok). Stačí nám dokázať rovnosť $|TF| \cdot |TG| = |TM| \cdot |TN|$.



Najskôr zo súmernosti podľa stredu M a z definície mocnosti bodu S vzhľadom ku kružnici l máme

$$|TF| \cdot |TG| = |SD| \cdot |SE| = |BM|^2 - |SM|^2 .$$

Ďalej použitím rovnosti $|TM| = |SM|$ a Euklidovej vety pre výšku BM pravouhlého trojuholníka SNB dostávame

$$|TM| \cdot |TN| = |TM| \cdot (|MN| - |TM|) = |SM| \cdot (|MN| - |SM|) = |SM| \cdot |MN| - |SM|^2 = |BM|^2 - |SM|^2 .$$

Tým je avizovaná rovnosť dokázaná.

Riešenie 3:

Opäť uvážime bod T z druhého postupu (pozri obrázok) a tentoraz využijeme kružnicovú inverziu podľa zadanej kružnice l. Keďže pri tomto zobrazení sú body F, G z kružnice l samodružné a stred M kružnice l neleží na priamke FG, bude, ako je známe, obrazom tejto priamky kružnica prechádzajúca bodmi F, G, M. Na nej však tiež bude ležať obraz bodu T, lebo $T \in FG$. Stačí teda ukázať, že zmieneným obrazom bodu T je práve bod N.

Euklidova veta pre výšku BM pravouhlého trojuholníka SNB dáva rovnosť

$$|BM|^2 = |MS| \cdot |MN| = |MT| \cdot |MN| .$$

Keďže M je stred a $|BM|$ polomer kružnice l, podľa ktorej invertujeme, a keďže bod N leží na polpriamke MT, je podľa rovnosti $|BM|^2 = |MT| \cdot |MN|$ bod N naozaj obrazom bodu T, čo sme chceli ukázať.