

**64. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2022/2023**

*Celoštátne kolo kategórie A
Prešov 13. – 16. apríla 2023*

Zadanie experimentálnej úlohy

A gördülési ellenállás mérése – „The rolling stones”

Elméleti bevezetés

A forgási szimmetriával rendelkező testek esetében könnyen értelmezhető, hogy a test mozgása a haladó mozgásából (transzláció) és a forgó mozgásából (rotáció) tevődik össze. A test mozgási energiája

$$E_k = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I_T\omega^2 \quad (1)$$

A jobboldal első kifejezése a haladó mozgás kinetikus energiája, ahol m a test tömege, v_T pedig a súlypont sebessége. A jobboldal második kifejezése a súlyponton áthaladó szimmetria tengely körüli forgómozgás kinetikus energiája, ahol I_T a test tehetlenségi nyomatéka erre a tengelyre számítva (AE–1 ábra), ω pedig a forgás szögsebessége. A gördülő mozgásnál a forgástengely a test szimmetriatengelyével azonos.

Egy test adott tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka

$$I = \int_V \rho r^2 dV,$$

ahol ρ a test sűrűsége, dV az elemi részének térfogata, r pedig ennek az elemi térfogatnak a tengelytől mért távolsága. Egy homogén vastagfalú cső szimmetriatengelyére számított tehetlenségi nyomatéka

$$I_T = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) \quad (2)$$

ahol M a cső tömege, r a belső, R pedig a külső átmérője (AE–1 ábra).

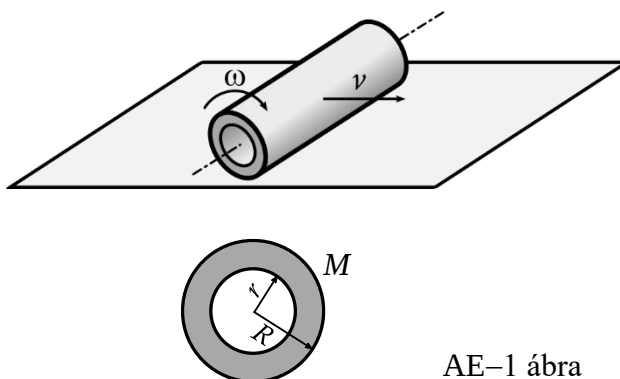
Ha a csövet úgy függesztjük fel, hogy a szimmetriatengelyével párhuzamos felfüggesztési tengely körül ingómozgást végezhesen, ennek az ingának a lengésideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgx}}, \quad (3)$$

ahol x a súlypont távolsága a felfüggesztési tengelytől, g a nehézségi gyorsulás, I pedig a felfüggesztési tengelyre számított tehetlenségi nyomaték (a Steiner tétel szerint)

$$I = I_T + Mx^2. \quad (4)$$

A guruló testre gördülési ellenállás hat, ennek nagysága



$$F_v = \frac{\xi}{R} F_N, \quad (5)$$

ahol ξ a gördülési súrlódási együttható, F_N pedig az erő, amely a testet az alátétre nyomja. A görgő testre még hat a légellenállás is, ennek az erőnek a nagysága

$$F_o = \frac{1}{2} C_x S_x \rho_v v^2 \quad (6)$$

ahol $C_x = 0,68$ az ún. alak-ellenállási tényező (a megadott érték L hosszúságú R sugarrú hengerre igaz, amennyiben $L/(2R) \approx 2$), S_x a mozgásra merőleges homlokfelület (a csőre $S_x = 2LR$), $\rho_v \approx 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a helységben levegőjének sűrűsége, v pedig a henger haladómozgásának sebessége.

A kísérlet

1. Feladat: a test tehetetlenségi nyomatékának megmérése

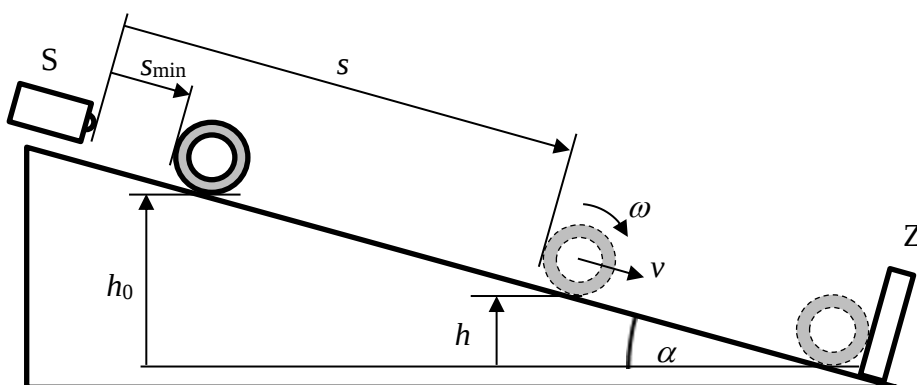
Mérjék meg, két eljárással, a vastagfalú cső szimmetriatengelyére viszonyított I_T tehetetlenségi nyomatékát! Az eredményeket hasonlítsák össze, és magyarázzák meg az esetleges eltérést!

- Mérjék meg a vastagfalú cső szükséges mennyiségeit, majd számítsák ki a tehetetlenségi nyomatékát a (2) képletből!
- Függeszték fel a csövet egy vékony lap élére úgy, hogy szabadon lenghessen e körül (a szimmetriatengelyével párhuzamos) felfüggesztési tengelye körül! Mérjék meg az így kialakított inga T lengésidejét, a (3) és (4) képletek szerinti számításokhoz szükséges mennyiségeket, majd a képletekből számítsák ki a szükséges tehetetlenségi nyomatékokat! *Megjegyzés: az időt a „stopky” számítógépes programmal mérik! A gravitációs gyorsulás $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.*

2. Feladat: a test gyorsulásának megmérése

Készítsék elő a műanyag felületű lejtőt az AE-2 ábra sematikus rajza alapján. A lejtő aljában van a Z ütközőgát, míg a lejtő felső végén az S távolságmérő szenzor, amely a t_i pillanatokban megméri a tárgy s_i távolságait – a mérést állandó $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ időközökben végzi. Tételezzék fel, hogy a test mozgása egyenletesen gyorsuló mozgás, és

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (7)$$



AE-2 ábra

- Állítsák a lejtő vízszintessel bezárt dőlésszögét $\alpha = 4^\circ$ -ra!

- b) Hagyják legurulni a csövet a lejtő felső szélétől az alsóig! Jegyezzék le (AE–2 ábra) a szenzor segítségével az s távolság t időfüggését! Ismételjék meg a mérést négyszer (4-szer: mivel a cső felülete nem tökéletesen hengeres, el indítás előtt fordítsák a csövet a forgástengelye körül 0° , 90° , 180° és 270° -kal)! A mérési eljárás a „Mérési útmutató” részben van részletesen leírva.
- c) Másolják át az MS Excel megadott lapjába az s_i, t_i adatokat! Találják meg, a legkisebb négyzetek módszerével (regresszióval), a (7)-ben leírt $s(t)$ függvényt a mért adatokból – ehhez a „Riešitel” („Solver”) Excel-bővítmény funkcióját használják! Fejezzék ki a kapott eredményekből a cső a_n gyorsulásait mind a négy mérésre ($n = 1,2,3,4$), majd számítsák ki a négy mérés a átlagos gyorsulását.
- Az adatok Excel táblázatban való feldolgozása a „Mérési útmutató” 3. pontjában található – „A kvadrátikus függés paramétereinek becslése – regresszió”.

3. Feladat: a gördülési ellenállás mérése a lejtőn

- a) Határozzák meg, mind a négy mérésre ($n = 1,2,3,4$), a cső v_n végsebességét és E_{kn} mozgási energiáját közvetlenül a pályavégi ütközése előtt! Határozzák meg a kezdeti és végső potenciális energia közti ΔE_p különbséget! Határozzák meg, a négy mérésből, a végsebesség v_T átlagértékét, és az $(E_{kn} - \Delta E_p)$ különbség átlagértékét – a különbség értékét magyarázzák fizikai érvekkel!
- b) Határozzák meg az F_{ok} közegellenállás értékét a v_T sebességre, és mutassák meg, hogy elhanyagolhatóan kicsi a csövet mozgató súlyerőhöz viszonyítva!
- c) Határozzák meg a gördülőellenállás által végzett W_{vA} munkát az energiák $\Delta E_p - E_k$ különbségéből, valamint a ξ_A gördülési súrlódási együtthatót. Határozzák meg, azonos eljárással, a gördülőellenállás által végzett W_{vB} munkát és a ξ_B gördülési súrlódási együtthatót a lejtő egy másik felületére!
- d) Mutassák ki, mindkét felületre, elhanyagolhatóan kicsi-e a közegellenállás a gördülési ellenálláshoz viszonyítva közvetlenül azelőtt, hogy a cső a Z gátnak ütközzön!
- e) Számítsák ki numerikusan, csak az első felületre, a közegellenállási erő által a csövön végzett $W_0 = \sum_i F_{oi} \Delta s_i$ munkát a lejtőn – a numerikus integráció az MS Excel segítségével végezzék. Itt $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1,2, \dots$

4. Feladat: A cső haladási idejének függése a pálya hosszától

- a) Határozzák meg, a szenzor által mért megtett út időfüggéséből, mennyi ideig halad a cső a lejtőn! Ismételjék a mérést a lejtő több hosszára a pálya végén található Z gát helyzetének változtatásával!
- b) Szerkesszék meg milliméterpapíron a cső haladási idejének függését a megtett pályahossztól!
- c) Fejezzék ki a cső haladási idejét, mint a pálya hosszának függvényét – használják a 2. feladatban kiszámított a, v_0, s_0 értékeket. Rajzolják a kapott függvényt a 4b) részfeladatban megszerkesztett grafikonba! Hasonlítsák össze a két függést, és vitassák meg a különbségeket!

A mért és kiszámított mennyiségeket a protokoll mellékelt válaszlapjába írják be! A többi mellékelt lapon elvégezhetik a piszkozatszámításokat – **a piszkozati lapok tartalmát azonban az értékelésnél nem vesszük figyelembe!**

A mérésből és számításokból származó releváns adatállományokat (file-okat), későbbi ellenőrzés végett, hagyják a számítógép felhasználói felületén!

Segédeszközök:

Lejtő és annak részei, adott tömegű vastagfalú cső, ékek, pecek alátétek a szenzorhoz, valamint a cső kezeléséhez, elmozdítható gát, tolómérce, hosszúságmérő, stopper (számítógépes program), uLAB

mérőberendezés távolságmérő szenzorral, számítógép internetes böngészővel a mérőműszer kezeléséhez, valamint az adatok MS Excelben való feldolgozásához.

Mérési útmutató

1. A „stopky” (stopper) programot megtalálják a számítógép felhasználói felületén.

A program használata (AE-3 ábra)

- Start** – nyomógomb elindítja az időmérést;
- Stop** – nyomógomb megállítja az időmérést (a *Start* indítás után a nyomógomb felirata *Stop*-ra változik);
- Reset** – nullázza az stopper kijelzőjét.



AE-3 ábra

2. Az uLAB mérőrendszer használata (AE-4 ábra)
(Az Eperjesi Egyetem Fizika Tanszékének fejlesztése)

A mérőrendszert a microUSB/USB-C csatlakozáson keresztül, vagy tápegységgel üzemeltetjük. A szenzorokat USB-A csatlakozáson keresztül csatoljuk a mérőegységhez. A számítógép a mérőrendszerhez Wi-Fi-n keresztül csatlakozik, a mérőberendezést a böngészőprogramon keresztül kezeljük.

Miután a mérőberendezést csatlakoztatjuk a Wi-Fi-hez (a bejelentkezési adatok az LCD kijelzőjén jelennek meg), mint honlap érhető el a böngészőprogramban. A honlap címe <http://192.168.4.1>, de megtalálható, mint hivatkozás (link) is a számítógép felhasználói felületén.



AE-4 ábra

Az időtől függő mennyiségek mérése a főmenüből érhető el: „uLAB → Time based measurement“
Ezen a felületről több panel is elérhető. A mérési paramétereket (*Record interval* – a mérések közti időintervallum, *Stop after* – a mérés időkorlátja) az AE-5 ábra szerint kell beállítani

AE-5 ábra

A mi esetünkben egy lézeres távolságmérő szenzort használunk (ToF¹). A mérésre hatással vannak a felületek (testek felülete, alátét) visszaverőképessége (reflexivitás), ezért mérés előtt a szenzor dőlés-szögét be kell állítani, hogy valós távolságokat mérjen (amely megfelel a hosszúságmérővel mért távolságnak). A cső indításához a rendelkezésre álló támasztékot használják! A méréseket úgy végezzék, hogy a cső legnagyobb távolsága ne haladja meg a 0,5 métert!

- rec** – ezzel a nyomógommbal indítjuk a mérést;
- stop** – a mérés megállítása mielőtt automatikusan is leállna (*stop after* – AE-5 ábra);
- delete** – a mért, de még nem mentett adatok törlése a műszerből (nem kívánt adatok törlése),
- save** – a mért adatok *mentése* (mentésükkel törölődnek a mérőműszer emlékezetéből); az adatokat tartalmazó állomány megnevezése a mentés ideje YYYYMMDDHHMMSS formátumban; a letöltött adatállomány a *data* mappában található (a **save** nyomógomb felett van feltüntetve). Az itt található adatállományok letölthetők a számítógépbe; megnyitásuk után (pl. kettős kattintással) tartalmuk átmásolható az MS Excel megfelelő lapján előkészített sejtekbe.
- download** – a mért adatok elérése letöltés nélkül

Amennyiben azonos feltételek mellett ismétljük a mérést, célszerűbb egy állományba lementeni az adatokat. Az egyes mérési sor adatait a táblázat fejlécei választják el egymástól.

3. A kvadrátikus időfüggés becslése – regresszió

- a) Másolják az $s(t)$ mennyiség mért adatait a lementett és megnyitott adatállományból az MS Excel táblagép megfelelő lapján található zöld színnel megjelölt részbe.
- b) A Q1 ill. Q2 (narancssárga) sejtekbe írják be a cső mozgásának kezdeti időpontját ill. végső időpontját – ezeket olvassák le a grafikonból (ha az egérrel rámutatnak a grafikon megfelelő adatpontjára, megjelennek az adatpont adatai). A megadott időintervallumra a táblagép kiszámítja a Q9 sejt értékét (3 c) pont - alább). Amennyiben az időintervallum adatai nem valósak, aktualizálják a Q1 és Q2 sejtekben megadott adatokat.

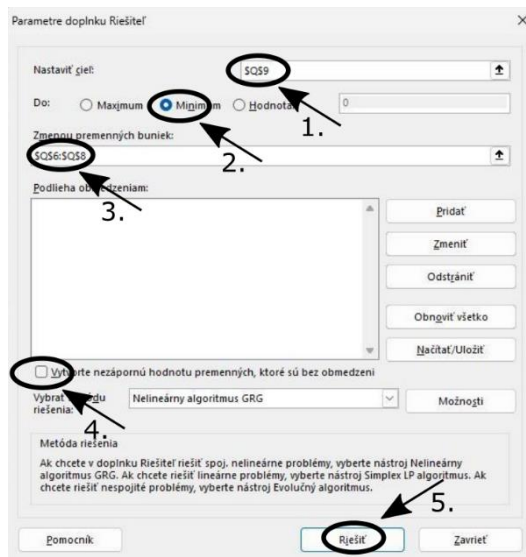
¹ A ToF (Time of Light) mérési elve azon alapszik, hogy méri a kiküldött fényjel küldésének és visszaérkezésének ideje közti különbséget. Az érzékenység következménye, hogy a legkisebb mérhető távolság $s_{\min} = 4$ cm.

c) Az MS Excel bővítmény *solver* (*riešiteľ*) funkciójával (AE-6 ábra) elvégezhető a (7) időfüggés optimális paramétereinek megkeresése a legkisebb négyzetek módszerével. Az a , v_0 és s_0 (lásd (7)) keresett paramétereket a következő lépésekkel kapjuk meg (lásd AE-7 ábra)

- 1. lépés: a célsejt (ennek a sejtnek az értékét minimalizálja – az elméleti görbe távolsága a mért értékektől – ebben a sejtben van azon négyzetek összege, amelyeket a mért és regresszió által meghatározott értékek különbségéből számít a táblagép minden adatpontra);
- 2. lépés: a célsejttel *minimalizációját* végezzük (az alábbi paraméterek változtatásával);
- 3. lépés: azok a sejtek, amelyek a változtatott paraméterek értékeit tartalmazzák (a paraméterek: a , v_0 és s_0)
- 4. lépés: kiválasztani! (annak a lehetősége, hogy a keresett értékek negatívak is lehetnek)
- 5. lépés: a *solver* (*riešiteľ*) indítása.



AE-6 ábra



AE-7 ábra

Fizika Diákolimpia – 64. évfolyam – az A kategória kerületi fordulójának feladatai

A feladatok szerzői: Ilkovič Sergej

A feladatokat lektorálta: Čáp Ivo, Mucha Ľubomír

Szerkesztő: Čáp Ivo

Szlovákiai Fizika Olimpiász Bizottsága

Kiadta: NIVAM - Národný inštitút vzdelávania a mládeže 2023

Translation © Teleki Aba; 2023