

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

## Riešenia úloh krajského kola kategórie C

- 1 Dvojciferné číslo  $\overline{ab}$  nazveme *nafúknuté*, ak z neho po pripočítaní 990-násobku vhodného jednociferného čísla získame štvorciferné číslo  $\overline{axxb}$  s nenulovou cifrou  $x$ . Koľko nafúknutelných čísel existuje?

(Mária Dományová)

### Riešenie 1:

Nech  $\overline{ab}$  je nafúknuté číslo,  $x$  príslušná cifra a  $y$  to vhodné jednociferné číslo také, že

$$\overline{ab} + 990y = \overline{axxb},$$

pričom zrejme  $y \neq 0$ . Potom ekvivalentne

$$(10a + b) + 990y = 1000a + 100x + 10x + b,$$

$$990y - 990a = 110x,$$

$$9y - 9a = x,$$

$$9(y - a) = x.$$

Nenulová cifra  $x$  je deliteľné 9, takže  $x = 9$ . Preto ďalej ekvivalentne

$$9(y - a) = 9,$$

$$y - a = 1,$$

$$y = a + 1.$$

Keďže  $y$  je jednociferné a nenulové,  $a$  môže nadobúdať ľubovoľnú z 8 hodnôt z  $\{1, \dots, 8\}$ . Pretože  $b$  môže byť ľubovoľná z 10 cifier, existuje  $8 \cdot 10$  čiže 80 nafúknutelných čísel, a to 10, ..., 89.

### Pokyny:

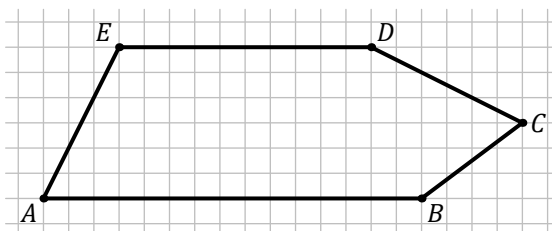
V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 Za odvodenie rovnosti  $9y - 9a = x$  alebo ekvivalentnej rovnosti dajte 2 body.
- A2 Za hypotézu, že  $x = 9$ , dajte 1 bod, ak je úplne zdôvodnená, dajte 3 body.
- B1 Za tvrdenie, že  $a$  môže nadobúdať ľubovoľnú z hodnôt 1 ..., 8, dajte 1 bod.
- B2 Za tvrdenie, že  $b$  môže nadobúdať ľubovoľnú z hodnôt 0, ..., 9, dajte 1 bod.
- B3 Za výpočet správneho počtu nafúknutelných čísel dajte 1 bod.

Nech  $a_i$  je počet bodov za  $A_i$  a  $b_i$  za  $B_i$ . Celkovo potom dajte  $\max\{a_1, a_2\} + b_1 + b_2 + b_3$  bodov.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

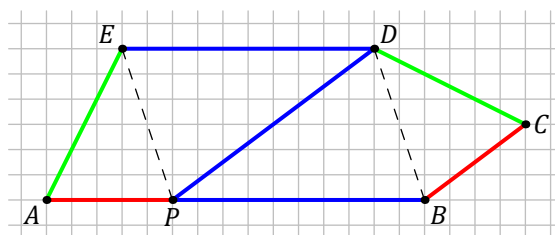
- 2 V štvorcovej sieti leží päťuholník  $ABCDE$ , ktorého vrcholy sú v mrežových bodoch rovnako ako na obrázku. Dokážte, že tento päťuholník sa dá rozdeliť na dva zhodné štvoruholníky.



(Jaroslav Zhouf, Josef Tkadlec)

### Riešenie:

Hľadané rozdelenie na štvoruholníky  $APDE$  a  $PBCD$  je na obrázku. Nech  $P$  je taký bod na strane  $AB$ , že  $BDEP$  je rovnobežník.



Potom trojuholníky  $PBD$  a  $DEP$  sú zhodné. Navyše sú rovnoramenné, pretože podľa Pytagorovej vety

$$|PD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 = |PB|.$$

Aj trojuholníky  $BCD$  a  $PAE$  sú pri tomto poradí vrcholov podľa vety sss zhodné, lebo

$$|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 = |PA|,$$

$$|CD| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = |AE|$$

a

$$|BD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = |PE|.$$

Štvoruholníky  $PBCD$  a  $DEAP$  sú teda zhodné.

#### Poznámka:

Napriek tomu, že vyššie uvedené riešenie je úplné, uvedieme ešte postup, ako sa na takéto rozdelenie dá prísť. Uvažujme najskôr rozdelenie päťuholníka jedným priamym rezom. Rez nemôže prechádzať dvoma vrcholmi, pretože by rozdelil päťuholník na štvoruholník a trojuholník. Ak rez neprechádza žiadnym vrcholom a jedna z častí bude štvoruholník, bude druhá časť päťuholník. Rez teda musí prechádzať jedným vrcholom a protilohou stranou. Je zrejmé, že rozdelená musí byť strana  $AB$ , pretože je najdlhšia, a teda rez bude prechádzať bodom  $D$ . Z Pytagorovej vety (ako vyššie) nahliadneme, že  $|CD| = |AE|$  a  $|BC| = 5$ , ďalej  $|AB| = 15$ ,  $|ED| = 10$ . Keďže  $P$  je priesečník rezu s  $AB$ , platí  $|AP| = |BC| = 5$ .

Kvôli úplnosti ešte uvažujme prípad, kedy rozdelíme päťuholník lomenou čiarou pozostávajúcou z aspoň  $k$  úsečiek, kde  $k \geq 2$ . Aj keby sa rez začínal a končil vo vrcholoch, a nerozdelil tak žiadnu zo strán päťuholníka, výsledné mnohoúhelníky by mali  $n + k$  a  $5 - n + k$  strán, t. j. dokopy  $5 + 2k \geq 9$ , nemôžu to teda byť oba štvoruholníky. Tým sme dokázali (aj keď to od nás zadanie nevyžadovalo), že vyššie nájdené rozdelenie je jediné.

#### Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A1 Za zdôvodnené tvrdenie, že rez musí prechádzať bodom  $D$  a rozdeliť stranu  $AB$ , dajte 1 bod.

A2 Za nájdenie vhodného rozdelenia bez správneho zdôvodnenia dajte 3 body.

B1 Za zdôvodnenie rovnosti  $|DC| = |AE|$  dajte 1 bod.

Nech  $a_i$  je počet bodov za  $A_i$  a  $b_i$  za  $B_i$ . Celkovo potom dajte  $\max\{a_1, a_2\} + b_1$  bodov.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

Na úplné zdôvodnenie zhodnosti vzniknutých štvoruholníkov nestačí len konštatovanie, že oba majú rovnako dlhé príslušné strany. Za nezohľadnenie tohto argumentu strhnite 2 body.

- 3 Koľkými spôsobmi je možné vyfarbiť štvorcovú tabuľku  $4 \times 4$  štyrmi rôznymi farbami tak, aby každé jej políčko bolo vyfarbené práve jednou farbou a aby v každej z 9 menších štvorcových tabuliek  $2 \times 2$  bola každá farba práve raz?

(Jana Kopfová)

#### Riešenie 1:

Označme  $(a, b)$  políčko v riadku  $a$  a v stĺpci  $b$ .

Prostrednú tabuľku  $2 \times 2$  ofarbíme na začiatku, môžeme to urobiť  $4!$  čiže 24 spôsobmi. Farby označme A, B, C, D ako na obrázku:

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  |   |   |  |
|  | A | B |  |
|  | C | D |  |
|  |   |   |  |

Potom políčka (1, 2) a (1, 3) nemajú farbu A ani B. Rozoberme prípady:

- Nech má (1, 2) farbu C a (1, 3) farbu D.

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  | C | D |  |
|  | A | B |  |
|  | C | D |  |
|  |   |   |  |

Políčka (4, 2) a (4, 3) nemajú farbu C ani D. Rozoberme prípady:

- Nech má (4, 2) farbu A a (4, 3) farbu B.

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  | C | D |  |
|  | A | B |  |
|  | C | D |  |
|  | A | B |  |

Potom sú v 1. stĺpci striedavo farby B a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi, a v 4. stĺpci striedavo farby A a C, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi.

V tomto prípade teda existujú práve  $2 \cdot 2$  čiže 4 vyhovujúce spôsoby.

- Nech má (4, 2) farbu B a (4, 3) farbu A.

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  | C | D |  |
|  | A | B |  |
|  | C | D |  |
|  | B | A |  |

Potom má (3, 1) farbu D a (3, 2) farbu C.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | C | D |   |
|   | A | B |   |
| D | C | D | C |
|   | B | A |   |

Farby zvyšných políčok sú už jednoznačné, keďže sú to vždy posledné nevyplnené políčka v aktuálnej jedinej tabuľke  $2 \times 2$ . V tomto prípade teda existuje práve 1 vyhovujúci spôsob.

V tomto prípade teda existuje práve  $4 + 1$  čiže 5 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech má (1, 2) farbu D a (1, 3) farbu C.

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  | D | C |  |
|  | A | B |  |
|  | C | D |  |
|  |   |   |  |

Potom má (3, 1) farbu B a (3, 2) farbu A.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | D | C |   |
| B | A | B | A |
|   | C | D |   |
|   |   |   |   |

Potom má (1, 1) farbu C, (3, 1) farbu D, (1, 4) farbu D a (3, 4) farbu C.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| C | D | C | D |
| B | A | B | A |
| D | C | D | C |
|   |   |   |   |

Potom sú v 4. riadku striedavo farby A a B, čo možno urobiť 2 spôsobmi.

V tomto prípade teda existujú práve 2 vyhovujúce spôsoby.

Pre pevné vyplnenie prostrednej tabuľky  $2 \times 2$  teda existuje práve  $5 + 2$  čiže 7 vyhovujúcich spôsobov. Všetkých vyhovujúcich vyfarbení je preto  $24 \cdot 7$  čiže 168.

### Riešenie 2:

Označme  $(a, b)$  políčko v riadku  $a$  a v stĺpci  $b$ .

Rozoberme prípady:

- Nech sú prvé 3 políčka 1. riadku ofarbené rôznymi farbami.

To je možné urobiť  $4 \cdot 3 \cdot 2$  čiže 24 spôsobmi.

Ich farby označme postupne A, B, C, štvrtú farbu označme D.

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| A | B | C |  |
|   |   |   |  |
|   |   |   |  |
|   |   |   |  |

Potom  $(2, 2)$  má farbu D, takže  $(2, 1)$  má farbu C a  $(2, 3)$  farbu A.

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| A | B | C |  |
| C | D | A |  |
|   |   |   |  |
|   |   |   |  |

Potom  $(3, 2)$  má farbu B, takže  $(3, 1)$  má farbu A a  $(3, 3)$  farbu C.

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| A | B | C |  |
| C | D | A |  |
| A | B | C |  |
|   |   |   |  |

Potom  $(4, 2)$  má farbu D, takže  $(4, 1)$  má farbu C a  $(4, 3)$  farbu A.

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| A | B | C |  |
| C | D | A |  |
| A | B | C |  |
| C | D | A |  |

Potom sú v 4. stĺpci striedavo farby B a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi.

V tomto prípade teda existuje práve  $24 \cdot 2$  čiže 48 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech nie sú prvé 3 políčka 1. riadku ofarbené rôznymi farbami.

To znamená, že  $(1, 1)$  a  $(1, 3)$  majú rovnakú farbu, označme ju A. Nech B je farba  $(1, 2)$ . To je možné urobiť  $4 \cdot 3$  čiže 12 spôsobmi.

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| A | B | A |  |
|   |   |   |  |
|   |   |   |  |
|   |   |   |  |

Rozoberme prípady:

- Nech  $(1, 4)$  má farbu B.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |

Zvyšné farby označme C a D. Potom sú v 2. riadku striedavo farby C a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi, ďalej v 3. riadku striedavo farby A a B, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi, a ďalej v 4. riadku striedavo farby C a D, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi.

V tomto prípade teda existujú práve  $12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$  čiže 96 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech  $(1, 4)$  nemá farbu B.

To môžeme urobiť 2 spôsobmi. Označme túto farbu C a zvyšnú D.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | A | C |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |

Potom  $(2, 3)$  má farbu D, takže  $(2, 2)$  má farbu C a  $(2, 4)$  farbu B.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | A | C |
|   | C | D | B |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |

Potom  $(3, 3)$  má farbu A, takže  $(3, 2)$  má farbu B a  $(3, 4)$  farbu C.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | A | C |
|   | C | D | B |
|   | B | A | C |
|   |   |   |   |

Potom  $(4, 3)$  má farbu D, takže  $(4, 2)$  má farbu C a  $(4, 4)$  farbu B.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | A | C |
|   | C | D | B |
|   | B | A | C |
|   | C | D | B |

Farby zvyšných políček sú už jednoznačné, keďže sú to vždy posledné nevyplnené políčka v aktuálne jedinej tabuľke  $2 \times 2$ . V tomto prípade teda existuje práve  $12 \cdot 2$  čiže 24 vyhovujúcich spôsobov.

Všetkých vyhovujúcich vyfarbení je preto  $48 + 96 + 24$  čiže 158.

#### Pokyny:

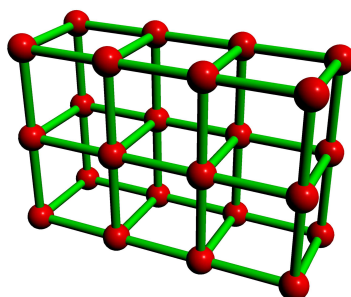
Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Za tvrdenie, že tabuľku  $2 \times 2$  je možné požadovaným spôsobom vyfarbiť 24 spôsobmi, dajte 1 bod, pokiaľ je tvrdenie úplne zdôvodnené, dajte 2 body.

Ďalšie 1 až 3 body dajte podľa úplnosti rozboru možných prípadov.

Za numerickú chybu pri sčítaní či násobení strhnite 1 bod.

- 4 Lenka stavia konštrukciu tvaru kvádra z magnetických tyčínok dĺžky 1 a kovových guľôčok. Na konštrukciu  $2 \times 3 \times 1$  (pozri obrázok) spotrebovala 46 tyčínok a 24 guľôčok. Na inú konštrukciu  $a \times b \times 1$ , pričom  $b \geq a \geq 1$ , spotrebovala 679 tyčínok. Koľko na ňu spotrebovala guľôčok? Určte všetky možnosti.



(Jana Kopfová, Lenka Kopfová, Josef Tkadlec)

#### Riešenie 1:

V prednej vrstve ležia vodorovné tyčinky v  $a + 1$  riadkoch, každý z nich obsahuje  $b$  tyčínok, a zvislé tyčinky v  $b + 1$  stĺpcoch, každý z nich obsahuje  $a$  tyčínok. V prednej vrstve je preto  $b(a + 1) + a(b + 1)$  tyčínok. Rovnaký počet ich je aj v zadnej vrstve.

Tyčíniek, ktoré spájajú prednú a zadnú vrstvu, je v každej z  $a + 1$  vodorovných rovín  $b + 1$ , takže spolu je ich  $(a + 1)(b + 1)$ .

Platí teda

$$(b(a + 1) + a(b + 1)) + (b(a + 1) + a(b + 1)) + (a + 1)(b + 1) = 679,$$

ekvivalentne

$$(ab + b) + (ab + a) + (ab + b) + (ab + a) + (ab + a + b + 1) = 679,$$

$$5ab + 3a + 3b = 678,$$

$$5a \cdot 5b + 5a \cdot 3 + 5b \cdot 3 = 5 \cdot 678,$$

$$5a \cdot 5b + 5a \cdot 3 + 5b \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 5 \cdot 678 + 3 \cdot 3,$$

$$(5a + 3)(5b + 3) = 3399,$$

$$(5a + 3)(5b + 3) = 3 \cdot 11 \cdot 103.$$

Keďže sú čísla  $5a + 3$  a  $5b + 3$  prirodzené a väčšie ako 3 a platí  $5a + 3 \leq 5b + 3$ , ďalej ekvivalentne

$$(5a + 3, 5b + 3) \in \{(11, 309), (33, 103)\},$$

$$(5a, 5b) \in \{(8, 306), (30, 100)\},$$

a pretože 8 nie je deliteľné 5, ekvivalentne

$$(5a, 5b) = (30, 100),$$

$$(a, b) = (6, 20).$$

### **Pokyny:**

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 Za správne vyjadrenie počtu potrebných tyčíniek pomocou  $a$  a  $b$  dajte 2 body, z toho 1 bod za správne zdôvodnenie.
- A2 Za úpravu rovnice na súčinový tvar dajte 2 body.
- A3 Za nájdenie riešenia dajte 1 bod.

Nech  $a_i$  je počet bodov za  $A_i$ . Celkovo potom dajte  $a_1 + a_2 + a_3$  bodov.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

---