MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

4 Pozdĺž kružnice sú napísané aspoň 3 navzájom rôzne prvočísla. Pre každé dve susedné prvočísla určíme najväčšie prvočíslo deliace ich súčet. Takto získame až na poradie opäť rovnaké prvočísla, ako boli tie napísané. Nájdite všetky možné počiatočné množiny prvočísel.

(Napríklad prvočísla 2, 7, 3, 11, 17 v tomto poradí nevyhovujú, pretože zodpovedajúce súčty 9, 10, 14, 28, 19 majú najväčšie prvočíselné delitele postupne 3, 5, 7, 7, 19.)

(Michal Janík)

Riešenie:

Nech M je vyhovujúca množina prvočísel a p je najväčšie z nich. Keďže sú v M aspoň 3 prvočísla, platí $p \geq 5$. Podľa zadania je súčet niektorých dvoch rôznych prvočísel z M násobkom p. Súčet ľubovoľných dvoch rôznych prvočísel z M je však menší ako $p+p$ čiže $2p$, takže tento súčet je rovný p. Keďže p je nepárne, jedno zo sčítaných prvočísel je párne, t. j. je to 2, takže to druhé je $p-2$. Teda $2 \in M$ a $p-2 \in M$. Všimnime si tiež, že $p-2$ je druhým najväčším číslom v M, lebo číslo $p-1$ je párne a väčšie ako 2, takže to nie je prvočíslo.

Aj prvočíslo $p-2$ musí byť najväčším prvočiniteľom súčtu niektorých dvoch rôznych prvočísel z M. Najväčší možný súčet dvoch rôznych čísel z M je $p+(p-2)$ čiže $2p-2$, takže je menší než $3(p-2)$, a teda je to $2(p-2)$ alebo $p-2$. Ukážeme, že v oboch prípadoch platí $p-4 \in M$:

- Nech je tento súčet $2(p-2)$.

  Sčítance sú rôzne, takže väčší z nich je väčší ako $p-2$. Jediné také číslo v M je však p, takže druhý sčítanec je $2(p-2)-p$ čiže $p-4$.
- Nech je tento súčet $p-2$.

  Prvočíslo $p-2$ je nepárne, teda jeden zo sčítancov je 2 a druhý $(p-2)-2$ čiže $p-4$.

Ukázali sme teda, že množina M obsahuje prvočísla p, $p-2$ a $p-4$. Tieto čísla majú rôzne zvyšky po delení 3, takže jedno z nich je deliteľné 3, a teda je to 3. Ide teda o prvočísla 3, 5, 7. Vieme tiež, že $2 \in M$, a keďže 7 je podľa predpokladu najväčšie prvočíslo v M, iné prvočísla M neobsahuje.

Ukážeme, že množina $\{2, 3, 5, 7\}$ vyhovuje zadaniu: Jej prvky stačí pozdĺž kružnice napísať v poradí 2, 5, 3, 7, príslušné súčty sú potom postupne 7, 8, 10, 9 s najväčšími prvočíselnými deliteľmi postupne 7, 2, 5, 3.

Jediná vyhovujúca množina je teda $\{2, 3, 5, 7\}$.

---

5 Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n s nasledujúcou vlastnosťou: Vo štvorcovej tabuľke $n \times n$ sa dá vyfarbiť $2n$ políčok tak, že žiadne dve z nich nesusedia stranou ani vrcholom a v každom riadku aj každom stĺpci sú vyfarbené práve 2 políčka.

(Jakub Štepo)

Riešenie:

Zrejme $n \geq 2$. Rozoberme prípady:

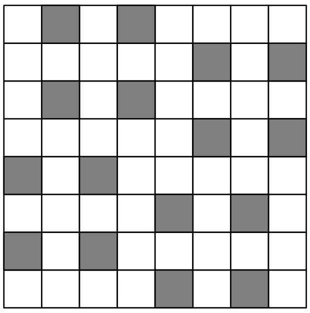
- Nech $2 \leq n \leq 7$.

  V ľubovoľných 2 susedných riadkoch tabuľky sú spolu 4 vyfarbené políčka, pričom však žiadne dve z nich nemôžu byť v rovnakom stĺpci ani v susedných stĺpcoch. Medzi každými dvoma z týchto 4 stĺpcov tak musí byť aspoň 1 ďalší, takže $n \geq 4+3=7$, a teda $n=7$.

  V ľubovoľných 2 susedných riadkoch tabuľky je tak po 1 vyfarbenom políčku práve v 1., 3., 5., 7. stĺpci zľava. V 1. stĺpci je teda vyfarbené 1 políčko v 1. alebo 2. riadku, 1 políčko v 3. alebo 4. riadku a 1 políčko v 5. alebo 6. riadku, spolu sú tam teda aspoň 3 vyfarbené políčka, čo je spor.

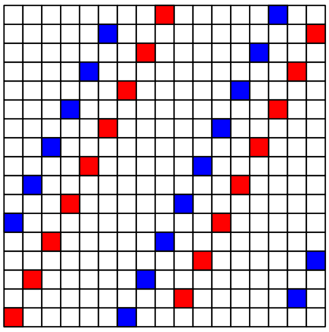
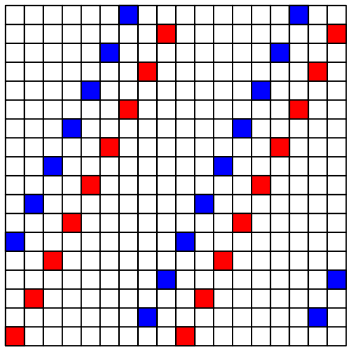
  Tento prípad teda nevyhovuje.
- Nech $n=8$.

  Vyhovujúce ofarbenie je napríklad takéto:



- Nech $n \geq 9$.

  Riadky i stĺpce očíslujme číslami od 0 do $n-1$ a políčko v x. stĺpci zľava a y. riadku zdola označme (x, y). Pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ nech $A_i = (i, 2i \bmod n)$ a $B_i = (i, (2i+5) \bmod n)$. Políčka A_0, ..., A_{n-1} vyfarbime červenou a políčka B_0, ..., B_{n-1} modrou.

  V každom stĺpci je teda jedno červené a jedno modré políčko. Ak je n nepárne, aj v každom riadku je jedno červené a jedno modré políčko. Ak je n párne, v každom riadku sú buď dve červené, alebo dve modré políčka.

  Ukážeme, že žiadne dve vyfarbené políčka nesusedia, zrejme stačí vyšetriť len dvojice v rovnakých alebo susedných stĺpcoch:

  - Políčka B_i a A_i, kde $i \in \{0, \dots, n-1\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok 5.
  - Políčka A_i a A_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo sa čísla ich riadkov líšia aspoň o 2.
  - Políčka B_i a B_{i+1} kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo sa čísla ich riadkov líšia aspoň o 2.
  - Políčka B_i a A_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok 3.
  - Políčka A_i a B_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok $n-7$, čo je aspoň 2.

Vyhovujú teda práve čísla väčšie než 7.

Poznámka:

Uvedené farbenie v prípade $n = 8$ je až na osovú súmernosť jediné.

---

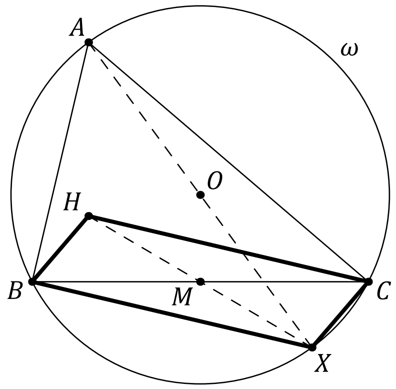
6 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme H priesečník jeho výšok, ω kružnicu jemu opísanú a O jej stred. Ďalej označme M stred strany BC a D priesečník priamky AH s kružnicou ω rôzny od A. Priamka DM pretína kružnicu ω v bode E rôznom od D. Nech F je priesečník priamky AE s kružnicou opísanou trojuholníku OME rôzny od E. Dokážte, že platí $|FH| = |FA|$.

(Michal Pecho)

Riešenie:

Nech X je obraz bodu A v súmernosti podľa stredu O, úsečka AX je teda priemer ω.

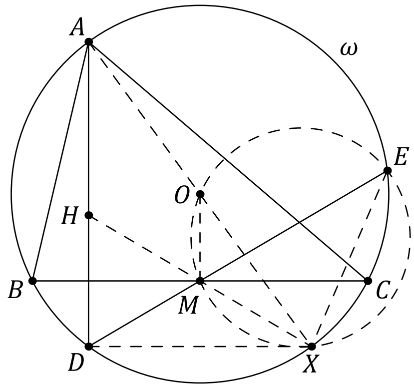
Podľa Tálesovej vety je BX kolmá na AB, a keďže aj priamka CH obsahujúca výšku z C je na ňu kolmá, sú navzájom rovnobežné. Analogicky sú rovnobežné aj priamky BH a CX, takže štvoruholník $BXCH$ je rovnobežník. Bod M ako stred jeho uhlopriečky BC je teda aj stredom jeho druhej uhlopriečky HX.



Keďže O leží na osi strany BC, priamka OM je kolmá na BC, a preto rovnobežná s AD, takže uhly MOX a DAX sú súhlasné. Preto podľa vety o obvodových uhloch pre tetivu DX máme

$$|\sphericalangle MOX| = |\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle DEX| = |\sphericalangle MEX|,$$

z čoho opäť podľa tejto vety pre tetivu MX dostávame, že štvoruholník $MOEX$ je tetivový.



Podľa Tálesovej vety je uhol AEX čiže FEX pravý, takže opäť podľa tejto vety je FX priemerom kružnice opísanej OME. Opäť podľa tejto vety sú uhly FOX a FMX pravé, a keďže O a M sú stredy úsečiek AX, resp. HX, F leží na ich osiach. Preto $|FA| = |FX| = |FH|$.