# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

## Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

**1** Pre reálne čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Koľko z rovností

$$ab = cd,$$

$$ac = bd,$$

$$ad = bc$$

môže súčasne platiť?

(Michal Janík)

**Riešenie:**

Práve 3 z týchto rovností platia napríklad v prípade $(a, b, c, d) = (1, -1, 1, -1)$.

Práve 2 z týchto rovností platia napríklad v prípade $(a, b, c, d) = (1, -1, 2, -2)$.

Dokážeme, že menej rovností ako 2 platiť nemôže. Rozoberme prípady:

- Nech sú niektoré dve z čísel $a$, $b$, $c$, $d$ opačné.
  Vzhľadom na symetriu bez ujmy na všeobecnosti nech $a = -b$. Potom

  $$(-b) + b + c + d = 0,$$

  $$c = -d,$$

  takže platí

  $$ac = (-b)(-d) = bd$$

  a

  $$ad = (-b)d = b(-d) = bc,$$

  a teda platia aspoň 2 z rovností.
- Nech nie sú žiadne dve z čísel $a$, $b$, $c$, $d$ opačné.
  Potom $a + b \neq 0$ a

  $$\frac{a+b}{ab} = \frac{b+a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = -\frac{d+c}{cd} = -\frac{c+d}{cd} = \frac{-(c+d)}{cd} = \frac{a+b}{cd},$$

  takže

  $$\frac{1}{ab} = \frac{1}{cd},$$

  $$ab = cd.$$

  Analogicky platia obe zvyšné rovnosti, takže platia všetky 3.

Môžu teda platiť 2 alebo 3 rovnosti.

**Poznámka:**

Ukážeme ďalšie dva spôsoby, ako dokázať, že niektoré dve z čísel $a$, $b$, $c$, $d$ sú k sebe opačné, a teda že nastane prvý z rozoberaných prípadov:

- Z prvého vzťahu

  $$d = -(a + b + c),$$

  takže z druhého

  $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0,$$

$$bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc=0,$$
$$bc(a+b)+bc^2+ca(a+b)+c^2a+ab(a+b)+abc-abc=0,$$
$$bc(a+b)+ca(a+b)+ab(a+b)+\left(c^2a+bc^2\right)=0,$$
$$bc(a+b)+ca(a+b)+ab(a+b)+c^2(a+b)=0,$$
$$(a+b)\left(bc+ca+ab+c^2\right)=0,$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=0,$$

takže niektoré dve z čísel $a$, $b$, $c$ sú k sebe opačné.

- Z druhého vzťahu vynásobením nenulovým číslom $abcd$ dostávame

$$abc+bcd+cda+dab=0.$$

Nech $f$ je funkcia definovaná vzťahom

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

všetky jej korene sú teda $a, b, c, d$. Roznásobením zátvoriek na pravej strane (resp. použitím Viètových vzťahov) dostaneme

$$f(x)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+bcd+cda+dab)x+abcd$$

$$=x^4-0x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-0x+abcd=x^4+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+abcd,$$

takže $f$ je párna funkcia. Keďže má koreň $a$, musí mať aj koreň $-a$, a pretože $a\neq 0$, platí $-a\in\{b,c,d\}$, takže niektoré dve z čísel $a$, $b$, $c$, $d$ sú k sebe opačné.

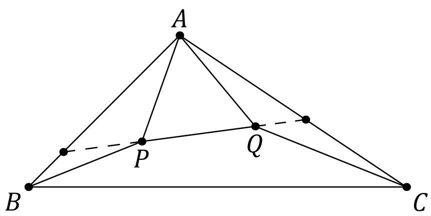
---

**2** Nájdite najväčšie celé číslo $n$ s nasledujúcou vlastnosťou: Kedykoľvek je v rovine daných päť navzájom rôznych bodov tak, že niektoré dva z nich ležia vo vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi bodmi, je možné niektoré tri z týchto piatich bodov označiť $X$, $Y$, $Z$ tak, že platí $n^\circ<|\sphericalangle XYZ|\leq 180^\circ$.

(Josef Tkadlec)

**Riešenie:**

Označme daných päť bodov $A$, $B$, $C$ a $P$, $Q$ tak, že $P$ a $Q$ ležia vo vnútri trojuholníka $ABC$, priamka $PQ$ pretína strany $AB$ a $AC$ a neprechádza bodom $A$ a bod $P$ leží vnútri uhla $BAQ$:

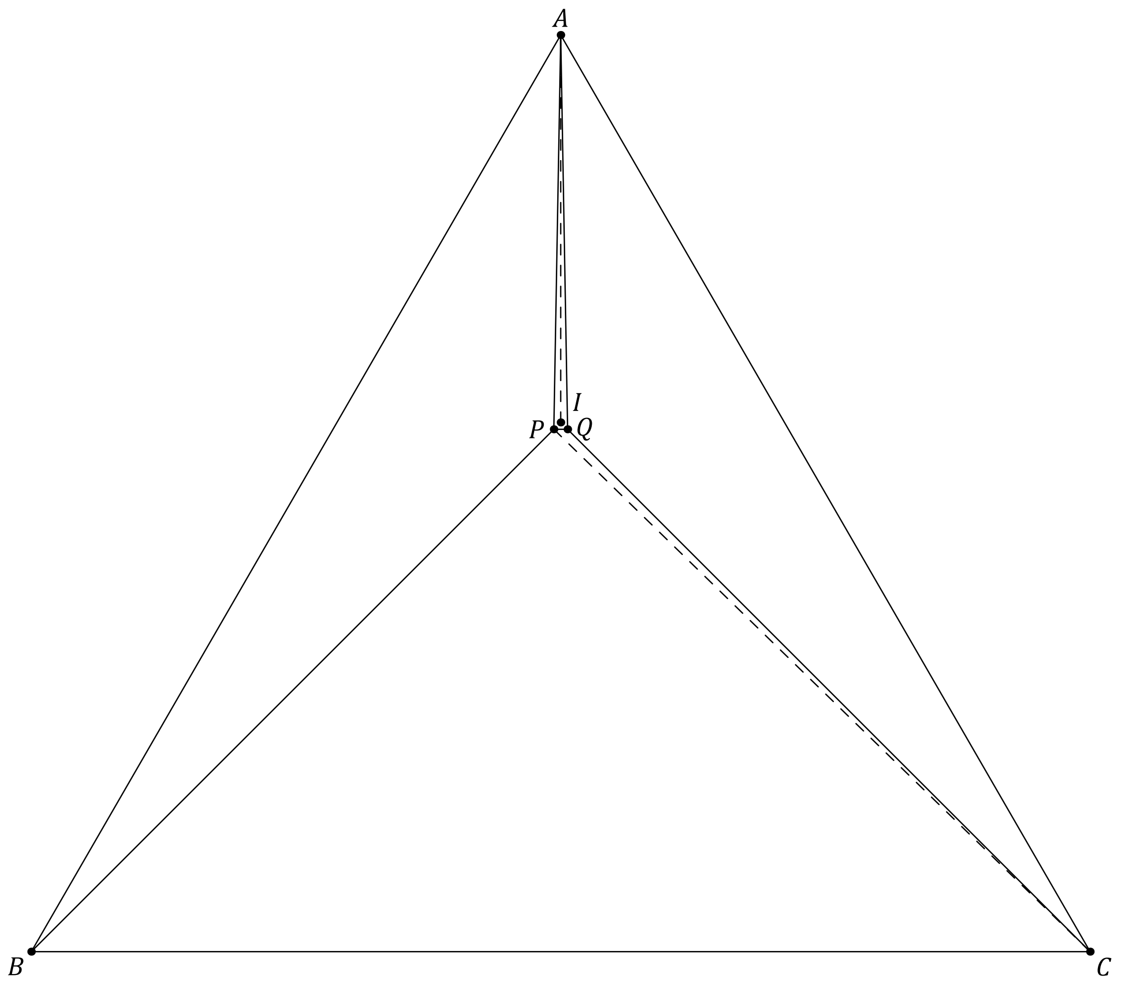



Potom možno trojuholník $ABC$ rozdeliť na konvexný štvoruholník $BPQC$ a trojuholníky $ABP$, $APQ$, $AQC$. Preto platí

$$|\sphericalangle BPA|+|\sphericalangle BPQ|+|\sphericalangle CQA|+|\sphericalangle CQP|=(|\sphericalangle BPA|+|\sphericalangle BPQ|)+(|\sphericalangle CQA|+|\sphericalangle CQP|)$$
$$=(360^\circ-|\sphericalangle APQ|)+(360^\circ-|\sphericalangle AQP|)=720^\circ-(|\sphericalangle APQ|+|\sphericalangle AQP|)$$
$$=720^\circ-(180^\circ-|\sphericalangle PAQ|)=540^\circ+|\sphericalangle PAQ|>540^\circ=4\cdot 135^\circ,$$

takže jeden z uhlov $BPA$, $BPQ$, $CQA$, $CQP$ je väčší než $135^\circ$.

Nájdeme päť bodov takých, že každý nimi určený konvexný uhol má veľkosť najviac $136^\circ$: Nech $ABC$ je rovnostranný trojuholník a $I$ jeho vnútorný bod taký, že $BIC$ je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou $BC$. Na úsečkách $BI$ a $CI$ zvoľme body $P$, resp. $Q$ také, že $|\sphericalangle PAI|=|\sphericalangle QAI|=1^\circ$. Keďže $P$ a $Q$ sú súmerné podľa priamky $AI$, úsečka $PQ$ je rovnobežná s $BC$, a teda $PIQ$ je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou $PQ$.




Všetky uvažované uhly s vrcholmi $A$, $B$, $C$ sú najviac 60°. Vzhľadom na súmernosť bodov $P$ a $Q$ a rovnako bodov $B$ a $C$ podľa priamky $AI$ stačí postupne rozobrať uhly s vrcholom $P$:

- $|\sphericalangle APQ| = 90° - |\sphericalangle PAI| = 90° - 1° = 89° \leq 136°$.
- $|\sphericalangle BPQ| = 180° - |\sphericalangle IPQ| = 180° - 45° = 135° \leq 136°$.
- $|\sphericalangle CPQ| \leq |\sphericalangle BPQ| \leq 136°$.
- $|\sphericalangle APB| = 360° - |\sphericalangle APQ| - |\sphericalangle BPQ| = 360° - 89° - 135° = 136°$.
- $|\sphericalangle BPC| \leq |\sphericalangle BPQ| \leq 136°$.
- $|\sphericalangle CPA| < |\sphericalangle CQA| = |\sphericalangle BPA| = 136°$.

Hľadané číslo je teda 135.

**Poznámka:**

Tvrdenie úlohy súvisí s nasledujúcim problémom: Pre dané $n$, kde $n \geq 3$, a daný uhol $\alpha$ rozhodnite, či každá množina $n$ bodov v rovine obsahuje tri body, ktoré určujú konvexný uhol veľkosti aspoň $\alpha$.

V roku 1941 dokázal Szekeres (https://www.jstor.org/stable/pdf/2371290.pdf) nasledujúce tvrdenie: Ak $k \geq 2$ a $\varepsilon > 0$, tak v rovine existuje množina $2^k$ bodov takých, že všetky konvexné uhly nimi určené majú veľkosť najviac $(1-1/k) \cdot 180° + \varepsilon$. Špeciálne v prípade $k = 4$ a $\varepsilon = 0{,}01°$ teda existuje množina $2^4$ čiže 16 bodov roviny takých, že každé tri z nich určujú konvexný uhol veľkosti najviac 135,01°.

V roku 1960 potom Erdős a Szekeres spoločne dokázali (https://combinatorica.hu/p_erdos/1960-09.pdf) nasledujúce tvrdenie: Ak $k \geq 3$, tak každá množina $2^k$ bodov v rovine určuje konvexný uhol veľkosti aspoň $(1-1/k) \cdot 180°$. Špeciálne teda každá množina 16 bodov roviny určuje uhol veľkosti aspoň $(1 - 1/4) \cdot 180°$ čiže 135°.

Pre všeobecný počet bodov je táto otázka stále otvorená.

---

**3** Nech $p$ je najväčšie prvočíslo deliace prirodzené číslo $n$, kde $n > 1$. Pre každú neprázdnu podmnožinu deliteľov čísla $n$ napíšeme súčet jej prvkov. Predpokladajme, že sme takto napísali viac ako $p$ čísel z množiny $\{1, 2, \dots, p+2\}$ a žiadne číslo z tejto množiny sme nenapísali viackrát. Dokážte, že žiadne číslo sme nenapísali viackrát.

(Zdeněk Pezlar)

**Riešenie:**

Nech $n$ vyhovuje podmienkam, potom všetky čísla z $\{1, \dots, p+2\}$ až na najviac jedno sú napísané práve raz.

Označme $D(n)$ množinu deliteľov čísla $n$. Zrejme platí $1 \in D(n)$.

Ukážeme sporom, že $n$ je párne. Nech $n$ je nepárne, teda $2 \notin D(n)$ a $p \geq 3$. Keby platilo $3 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 3, čo by bol spor. Takže platí $\{1, 3\} \subseteq D(n)$ a medzi napísanými číslami sú 1, 3 a $1+3$ čiže 4, nie však 2. Keby platilo $5 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 5, čo by bol spor. Takže $\{1, 3, 5\} \subseteq D(n)$ a $p \geq 5$. Keby platilo $7 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 7, čo by bol spor. Takže $\{1, 3, 5, 7\} \subseteq D(n)$ a $p \geq 7$. Číslo 8 je však potom napísané viackrát, a to ako $1+7$ a ako $3+5$, čo je hľadaný spor.

Označme $k$ najväčšie prirodzené číslo také, že $2^k$ je deliteľom $n$, zrejme $k$ je kladné. Rozoberme prípady:

- Nech $n = 2^k$.

  Potom $p = 2$ a $D(n) = \{2^0, \dots, 2^k\}$. Vďaka jednoznačnosti zápisu v dvojkovej sústave sú súčty rôznych neprázdnych podmnožín množiny $D(n)$ práve všetky rôzne čísla od 1 po $2^{k+1} - 1$.

- Nech $n$ je deliteľné aj nejakým nepárnym prvočíslom.

  Označme $q$ najmenšie z nich, potom $q \leq p$. Ukážeme sporom, že platí $q = 2^{k+1} + 1$. Rozoberme prípady:

  - Ak $q \leq 2^{k+1} - 1$, tak číslo $q$ bude napísané raz ako súčet vhodných mocnín 2 a raz ako súčet množiny $\{q\}$, čo je spor.
  - Ak $q = 2^{k+1}$, tak $q$ je párne, čo je spor.
  - Ak $q \geq 2^{k+1} + 2$, tak medzi napísanými číslami chýbajú $2^{k+1}$ a $2^{k+1} + 1$, pričom $2^{k+1} + 1 \leq p + 2$, čo je spor.

  Vďaka podmnožinám deliteľov čísla $2^k$ je medzi napísanými číslami práve raz každé z čísel od 1 po $2^{k+1} - 1$ a tiež číslo $2^{k+1} + 1$ čiže $q$, ale číslo $2^{k+1}$ chýba. Pripočítaním $q$ k súčtom všetkých neprázdnych podmnožín deliteľov čísla $2^k$ vyjadríme práve raz aj každé z čísel od $q + 1$ čiže $2^{k+1} + 2$ do $q + (2^{k+1} - 1)$ čiže $2^{k+2}$. Tým sme zohľadnili súčty všetkých podmnožín množiny $\{2^0, \dots, 2^k\} \cup \{q\}$ deliteľov čísla $n$.

  Teraz ukážeme sporom, že číslo $n$ nemá vo svojom rozklade žiadne iné nepárne prvočíslo rôzne od $q$: Nech $r$ je najmenší nepárny prvočiniteľ $n$ väčší ako $q$. Rozoberme prípady:

  - Nech $r \leq 2^{k+2}$.

    Potom je však už napísané číslo $r$ napísané ešte raz ako súčet množiny $\{r\}$, čo je spor.
  - Nech $r = 2^{k+2} + 1$.

    Potom je číslo $2^{k+2} + 2$ čiže $r + 1$ napísané aspoň dvakrát, a to ako súčet deliteľov $r$ a 1 a ako deliteľ $2q$, keďže $n$ je párne.
  - Nech $r \geq 2^{k+2} + 2$.

    Potom okrem čísla $2^{k+1}$ nie je napísané ani číslo $2^{k+2} + 1$ čiže $2q - 1$, lebo je väčšie ako súčet ľubovoľnej podmnožiny deliteľov $\{2^0, \dots, 2^k\} \cup \{q\}$ a súčasne je menšie ako ľubovoľný iný deliteľ čísla $n$. Keďže však $2q - 1 < r < p + 2$, dostávame spor.

  Platí teda $n = 2^k \cdot q^l$, kde $q$ je prvočíslo, $l \geq 1$ a $q = 2^{k+1} + 1$. Všetky delitele $n$ sú zrejme tvaru $2^i q^j$. Sčítajme všetkých deliteľov s pevným $j$:

  $$q^j + 2q^j + \dots + 2^k q^j = (2^{k+1} - 1)q^j = (q-2)q^j < q^{j+1}.$$

  Súčet len niektorých z týchto deliteľov je preto v tvare $c_j \cdot q^j$, kde $c_j \in \{0, \dots, q-2\}$. Ak teda uvážime ľubovoľné napísané číslo a jeho zápis v sústave so základom $q$, musí príspevok pri mocnine $q^j$ vzniknúť ako súčet niektorých z deliteľov s $q^j$ v prvočíselnom rozklade. Z koeficientu pri $q^j$, ktorý je nanajvýš $q - 2$, potom vďaka jednoznačnosti zápisu v dvojkovej sústave už jednoznačne vyplýva, ktoré z deliteľov $q^j$, $2q^j$, ..., $2^k q^j$ sa v súčte vyskytli. Ku každému napísanému číslu tak môže prislúchať len jedna podmnožina $D(n)$.

**Poznámka:**

Z tohto vyplýva:

- Ak $n = 2^k$, tak napísané čísla sú 1, ..., $2^{k+1} - 1$.
- Ak $n = 2^k \cdot q^l$, kde $k, l \geq 1$, $q = 2^{k+1} + 1$ $q$ je prvočíslo, tak napísané čísla sú práve tie, ktoré sú pri vyjadrení v sústave o základe $q$ najviac $(l+1)$-ciferné a nikde neobsahujú cifru $q - 1$.