# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

## Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

**1** Do divadla prišli diváci buď peši, alebo autami, alebo autobusmi. Tých, ktorí prišli autobusmi, bolo viac ako 150. Autobusov bolo 6 a v každom prišlo rovnaké množstvo divákov. Tých, ktorí prišli peši alebo autami, bolo o 35 % menej ako tých, ktorí prišli autobusmi. Všetkých divákov dokopy bolo najviac 400.

Koľko divákov mohlo byť v divadle? Nájdite všetky možnosti.

(Erika Novotná)

**Riešenie:**

O divákoch, ktorí prišli autobusmi, budeme hovoriť ako o 1. skupine a o divákoch, ktorí prišli peši alebo autami, ako o 2. skupine.

1. skupina prišla v 6 rovnako obsadených autobusoch, takže počet ľudí v 1. skupine je násobok 6. V 2. skupine bolo o 35 % menej než v 1., takže pomer veľkostí 2. a 1. skupiny bol 100 % − 35 % čiže 65 %, čo je $\frac{65}{100}$, a teda v základnom tvare $\frac{13}{20}$. Počet ľudí v 1. skupine je teda násobkom 20.

Zhrnutím dostávame, že počet ľudí v 1. skupine je teda spoločným násobkom 6 a 20, je teda deliteľný ich najmenším spoločným násobkom 60.

Pre násobky 60 väčšie než 150 vyjadríme súčet veľkostí oboch skupín a overíme, či je menší než 400:

| 1. skupina | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. skupina | 117 | 156 | 195 | 234 | 273 | ... |
| súčet | 297 | 396 | 495 | 594 | 693 | ... |

Všetky ďalšie počty ľudí v 1. skupine sú už väčšie než 400, takže aj súčet bude väčší než 400.

V divadle teda bolo buď 297, alebo 396 divákov.

**Hodnotenie:**

- po 1 bode za každé vyhovujúce riešenie;
- 2 body za postrehy o deliteľnosti počtu ľudí v 1. skupine;
- 2 body za úplnosť rozboru možností v rámci daných obmedzení.

Pri iných spôsoboch skúšania možností hodnoťte dôslednosť pri overovaní prirodzenosti počtov v oboch skupinách.

**2** Štvoruholník $DRAK$ má nasledujúce vlastnosti:

- jeho vrcholy ležia na kružnici,
- je osovo súmerný podľa priamky $AD$,
- trojuholník $RAK$ je rovnostranný,
- strana $AK$ má dĺžku $x$.

Vyjadrite dĺžky uhlopriečok štvoruholníka $DRAK$ a jeho obsah v závislosti od $x$.

(Lenka Dedková)

**Riešenie:**

Uhlopriečka $KR$ je stranou rovnostranného trojuholníka $RAK$, platí teda

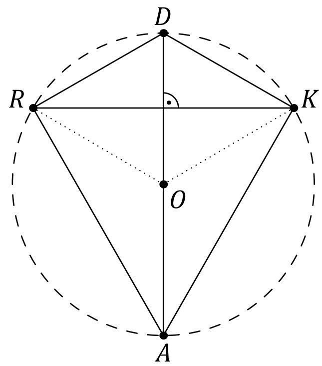
$$|KR| = |AK| = x.$$

Uhlopriečka $AD$ je priemerom kružnice, do ktorej je štvoruholník $DRAK$ vpísaný, t. j. priemerom kružnice opísanej trojuholníku $RAK$. V rovnostrannom trojuholníku splýva stred opísanej kružnice s ťažiskom i priesečníkom výšok. Polomer opísanej kružnice teda zodpovedá 2/3 výšky a tá sa rovná $\sqrt{3}/2$ dĺžky strany trojuholníka (čo je možné odvodiť pomocou Pytagorovej vety). Platí teda

$$|AD| = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AK| = \frac{2\sqrt{3}}{3} x.$$

Štvoruholník $DRAK$ je osovo súmerný podľa priamky $AD$, teda uhlopriečky $KR$ a $AD$ sú kolmé. Potom

$$S(DRAK) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |KR| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2.$$




**Poznámka:**

Predchádzajúci výpočet obsahu štvoruholníka $DRAK$ je založený na vyjadrení obsahu štvoruholníka s kolmými uhlopriečkami.

K rovnakému výsledku je možné dospieť aj takto: Obsah rovnostranného trojuholníka $RAK$ je $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, obsah trojuholníka $DRK$ je tretinový (zhoduje sa s trojuholníkmi $ORK$, $OKA$, $OAR$), celkovo

$$S(DRAK) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2.$$

**Poznámka:**

Úsečka $AD$ je priemerom kružnice opísanej trojuholníku $AKD$. Ten je podľa Tálesovej vety pravouhlý s pravým uhlom $AKD$. Obsah deltoidu $DRAK$ je teda rovný obsahu obdĺžniku so stranami $AK$ a $DK$. Pritom strana $DK$ je zhodná s polomerom kružnice.

**Hodnotenie:**

- Po 1 bode za každý z výsledkov: $|KR|$, $|AD|$, $S(DRAK)$;
- 2 body za pomocné vzťahy a postrehy (výška rovnostranného trojuholníka, polomer opísanej kružnice, kolmosť uhlopríečok a podobne);
- 1 bod za kvalitu komentára.

---

**3** Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $(a, b)$, pre ktoré platí

$$7a + 4b + 74 = a \cdot b.$$

(Erika Novotná)

**Riešenie:**

Pomocou neznámej $b$ vyjadríme $a$:

$$7a + 4b + 74 = ab,$$
$$4b + 74 = ab - 7a,$$
$$4b + 74 = (b - 7)a,$$

takže

$$a = \frac{4b + 74}{b - 7} = \frac{4(b - 7) + 4 \cdot 7 + 74}{b - 7} = \frac{4(b - 7)}{b - 7} + \frac{28 + 74}{b - 7} = 4 + \frac{102}{b - 7}.$$

Čísla $a$ a $b$ sú prirodzené a menovateľ $b - 7$ je nenulový, preto $b > 7$ a $b - 7$ delí 102. Keďže $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ a 2, 3, 17 sú prvočísla, číslo 102 má 8 kladných deliteľov. Pre každý z nich vyjadríme $b$ a $a$ podľa predchádzajúcich vzťahov:

| $b - 7$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 17 | 34 | 51 | 102 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 8 | 9 | 10 | 13 | 24 | 41 | 58 | 109 |
| $a$ | 106 | 55 | 38 | 21 | 10 | 7 | 6 | 5 |

Hodnoty $a$ a $b$ uvedené v tabuľke tvoria všetky vyhovujúce dvojice čísel.

**Poznámka:**

Úvodná úprava a následné úvahy môžu byť skrátene takto:

$$7a + 4b + 74 = a \cdot b,$$

$$74 = ab - 7a - 4b,$$

$$102 = ab - 7a - 4b + 28,$$

$$102 = (a - 4)(b - 7),$$

Čísla $a - 4$ a $b - 7$, a teda aj $a$ a $b$, sú určené možnými rozkladmi čísla 102 na dva (kladné) činitele. To vedie práve k riešeniam popísaným vyššie.

**Hodnotenie:**

- 2 body za vyjadrenie $a = \frac{4b+74}{b-7}$ a 1 bod za vyjadrenie $a = 4 + \frac{102}{b-7}$, resp. 3 body za vyjadrenie $102 = (a - 4)(b - 7)$;
- 1 bod za delitele čísla 102;
- 2 body za všetky riešenia.

Pri iných spôsoboch skúšania možností hodnoťte podľa úplnosti postupu a komentára.

---

**4** Nech $XYZ$ je trojuholník taký, že $|XY| = 8$ cm, $|YZ| = 6$ cm, $|ZX| = 7$ cm. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby platili nasledujúce podmienky:

- body $A$ a $C$ ležia na priamke $XY$,
- úsečky $AC$ a $XY$ sú rovnako dlhé,
- bod $Z$ leží na priamke $BD$,
- obsah trojuholníka $ACZ$ je dvakrát väčší ako obsah trojuholníka $ABC$.

Konštrukciu popíšte a zdôvodnite.

(Michaela Petrová)

**Riešenie:**

Uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$ sú zhodné a pretínajú sa vo svojich stredoch. Tento bod označíme $S$. Podľa zadania platí

$$|BD| = |AC| = |XY| = 8\text{ cm}.$$

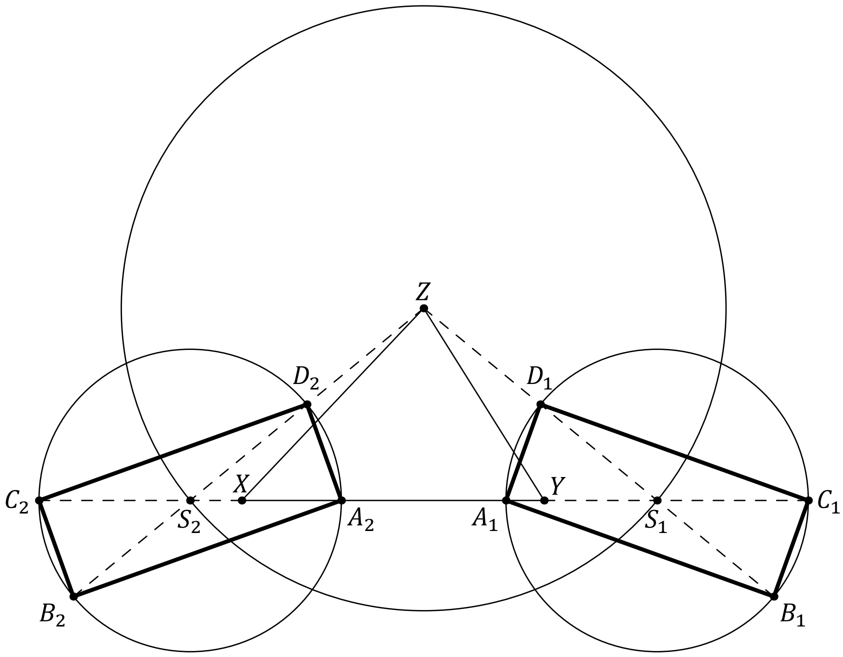
Trojuholníky $ABC$ a $CDA$ tvoria zhodné časti obdĺžnika $ABCD$. Trojuholníky $ACZ$ a $ABC$ majú spoločnú stranu $AC$ a body $Z$, $B$, $D$, $S$ ležia na jednej priamke. Z podmienky o obsahoch plynie

$$|SZ| = 2 \cdot |SB| = 2 \cdot |SD| = |BD| = 8\text{ cm}.$$

Keďže $ABCD$ je obdĺžnik, jeho uhlopriečky sú zhodné a rozpoľujú sa, a teda body $B$ a $D$ ležia na kružnici s priemerom $AC$.

Konštrukcia obdĺžnika $ABCD$:

1. priamka $XY$,
2. kružnica so stredom $Z$ a polomerom $|XY|$ čiže 8 cm,
3. bod $S$ ako priesečník priamky z 1. a kružnice z 2.,
4. kružnica so stredom $S$ a polomerom $\frac{1}{2}|XY|$ čiže 4 cm,
5. body $A$ a $C$ ako priesečníky priamky z 1. a kružnice zo 4.,
6. priamka $SZ$,
7. body $B$ a $D$ ako priesečníky priamky zo 6. a kružnice zo 4..




Možné stredy $S$ sú dva, a označenie dvojíc bodov $A$ a $C$, resp. $B$ a $D$ je zameniteľné, takže úloha má (až na značenie vrcholov) dve riešenia. Výsledné obdĺžniky sú navzájom zhodné.

**Poznámka:**

Z podmienky o obsahoch trojuholníkov $ACZ$ a $ABC$ plynie, že body $B$ a $D$ ležia na rovnobežkách s priamkou $XY$, ktoré sú v polovičnej vzdialenosti od $XY$ ako bod $Z$. Týmto postrehom je možné nahradiť nìektoré kroky v konštrukcii.

**Hodnotenie:**

- 1 bod za odvodenie $|BD| = 8$ cm;
- 2 body za odvodenie $|SZ| = 8$ cm;
- 1 bod za odvodenie polohy bodu $D$, resp. $B$ (rovnobežky v polovičnej vzdialenosti, resp. kružnica);
- 2 body za konštrukciu oboch obdĺžnikov a jej popis.

Diskusia o počte riešení nie je nutná na zisk plného počtu bodov.

---


- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autorka z SK MO: Erika Novotná
- recenzenti: Erika Novotná, Stanislav Krajči
- preklad: Erika Novotná, Stanislav Krajči