66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
celoštátne kolo kategória A
riešenie teoretických úloh

1. Elektróny v elektrickom a magnetickom poli

Riešenie:

a) Medzi elektródami E1 a E2 sa elektróny pohybujú v kombinovanom elektrickom a magnetickom poli, pričom sila elektrického poľa $\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = -e\,\boldsymbol{E}$ má smer osi, sila magnetického poľa $\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = -e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ je na os kolmá. Elektrická intenzita $E = U/d$ a vektor $\boldsymbol{E}$ má smer od E2 k E1.

Pohybová rovnica elektrónu má tvar

$$m\boldsymbol{a} = -e\,\boldsymbol{E} - e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\,.$$

Rovnicu rozložíme na zložku rovnobežnú s osou a kolmú na os. V smere rovnobežnom s osou pôsobí na elektrón konštantná sila elektrického poľa a pohyb je preto rovnomerne zrýchlený so zrýchlením

$$a_{\parallel} = \frac{e}{m}E\,.$$

Rýchlosť elektrónu v pozdĺžnom smere

$$v_{\parallel} = v_0\cos\alpha + \frac{eU}{md}t \qquad (1)$$

a posunutie v smere osi

$$x = v_0\,t\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{eU}{md}t^2\,.$$

Elektródu E2, $x = d$, elektrón dosiahne za čas t_1, pre ktorý dostávame rovnicu

$$t_1^2 + \frac{2md}{eU}v_0\,t_1\cos\alpha - \frac{2md^2}{eU} = 0\,,$$

ktorej riešenie je

$$t_1 = -\frac{md}{eU}v_0\cos\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{md}{eU}v_0\cos\alpha\right)^2 + \frac{2md^2}{eU}} = \frac{md}{eU}v_0\cos\alpha\left(\sqrt{1+\frac{2eU}{mv_0^2\cos^2\alpha}} - 1\right)$$

význam má iba znamienko +.
Pri dopade na elektródu E2 je pozdĺžna zložka rýchlosti elektrónu

$$v_{1\parallel} = v_0\cos\alpha + \frac{eU}{md}t_1 = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \frac{2eU}{m}}\,. \qquad (2)$$

Sila magnetického poľa je kolmá na smer osi i na smer pohybu. Preto priemet pohybu do roviny kolmej na os je rovnomerný a krivočiary s dostredivým zrýchlením

$$a_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{e}{m}v_{\perp}B\,,\ \text{pričom}\ v_{\perp} = v_0\sin\alpha\,.$$

Pre celkovú rýchlosť dopadu elektrónu na elektródu E2 máme

$$v_1 = \sqrt{v_{1\parallel}^2 + v_{1\perp}^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \frac{2eU}{m} + v_0^2\sin^2\alpha} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Pre dané hodnoty $v_1 = 2{,}06\times10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Pozn.: Tento výsledok možno získať aj použitím zákona zachovania mechanickej energie.

b) Priemet trajektórie elektrónu do roviny kolmej na os je kružnica s polomerom

$$R = \frac{m v_0 \sin\alpha}{e B}$$

a uhlová rýchlosť pohybu

$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{e}{m} B \text{, a teda perióda } T = 2\pi \frac{m}{e B}.$$

Do bodu O na elektróde E2 elektróny dopadnú iba ak $t_1 = n\,T$, tzn. s použitím (1) a (2)

$$v_{1\|} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \frac{2eU}{m}} = v_0 \cos\alpha + \frac{eU}{m d} n T,$$

odkiaľ vyjadríme uhol α, pod ktorým musia byť elektróny emitované, aby dopadli do bodu O

$$\cos\alpha_n = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{n}\frac{e B d}{2\pi m} - \pi n \frac{U}{B d}\right). \qquad (3)$$

Uhol α_n závisí od počtu n celých kružníc v priečnom priemete pohybu.

i. Elektrón dopadne do bodu O, ak $\alpha_0 = 0$, kedy na elektrón magnetické pole nepôsobí. Elektrón sa v tomto prípade pohybuje v smere osi rovnobežnom so smerom elektrického poľa a dopadá do bodu O.

ii. Zvyšné možnosti sú dané podmienkou $0 < \alpha_n < 90°$, tzn. $0 < \cos\alpha < 1$

$$0 < \frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{n}\frac{e B d}{2\pi m} - \pi n \frac{U}{B d}\right) < 1.$$

Pre ľavú nerovnosť máme

$$\frac{1}{n}\frac{e B d}{2\pi m} > \pi n \frac{U}{B d}\text{, odkiaľ } n < \frac{B d}{\pi}\sqrt{\frac{e}{2 m U}} = 8{,}17.$$

Pre pravú nerovnosť

$$n^2 + \frac{B d v_0}{\pi U} n - \frac{e B^2 d^2}{2\pi^2 m U} > 0.$$

Korene ľavej strany

$$n_{1,2} = -\frac{B d v_0}{2\pi U} \pm \sqrt{\left(\frac{B d v_0}{2\pi U}\right)^2 + \frac{e B^2 d^2}{2\pi^2 m U}} = \frac{B d v_0}{2\pi U}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\,Ue}{m v_0^2}}\right)$$

Výraz na ľavej strane je kladný, ak $n > n_2 > 0$, kde

$$n_2 = \frac{B d v_0}{2\pi U}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,Ue}{m v_0^2}}\right) = 7{,}42.$$

Z toho vyplýva, že jediným počtom okruhov je $n = 8$.
Pre dané hodnoty a $n = 8$ máme $\cos\alpha_8 = 0{,}221$, a teda $\alpha_8 = 77{,}2°$.

c) Pre vyhovujúce n platí pre uhol dopadu do bodu O.

i. Prvý prípad je $n = n_0 = 0$, kedy $\alpha_0 = 0$ a $\beta_0 = 0$.

ii. Pre $n > 0$ je uhol α_n daný vzťahom (3) a pre uhol dopadu platí

$$\sin\beta_n = \frac{v_\perp}{v_1} = \frac{v_0 \sin\alpha_n}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2eU}{mv_0^2}}}\sqrt{1-\cos^2\alpha_n}\ .$$

Po dosadení za $\cos\alpha_n$ zo vzťahu (3)

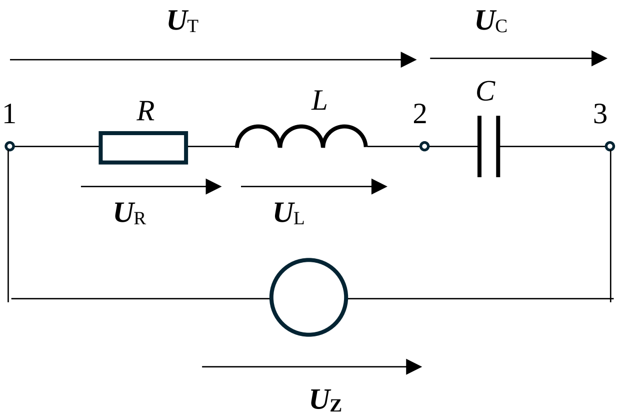
$$\sin\beta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2eU}{mv_0^2}}}\sqrt{1-\frac{1}{v_0^2}\left(\frac{1}{n}\frac{eBd}{2\pi m} - \pi n \frac{U}{Bd}\right)^2}\ .$$

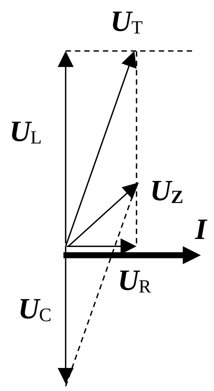
Pre dané hodnoty a $n = 8$ dostávame $\sin\beta_8 = 9{,}45\times10^{-2}$, a teda $\beta_8 = 5{,}42°$.

2. Indukčná cievka

Riešenie:

a) Náhradná schéma obvodu:





Obr. RA–1

Pre fázory napätia platí $\boldsymbol{U}_\mathrm{T} + \boldsymbol{U}_\mathrm{C} = \boldsymbol{U}_\mathrm{Z}$. Keďže fázory $\boldsymbol{U}_\mathrm{T}$ a $\boldsymbol{U}_\mathrm{C}$ sú fázovo posunuté, pre ich sčítanie platí trojuholníková nerovnosť $U_\mathrm{T} + U_\mathrm{C} > U_\mathrm{Z}$.

b) Impedancia sériového RLC obvodu

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathbf{j}\omega L + \frac{1}{\mathbf{j}\omega C},$$

kde **j** (niekedy označená aj **i**) je imaginárna jednotka.

Fázor prúdu

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{U}}{R + \mathbf{j}\omega L + \frac{1}{\mathbf{j}\omega C}},$$

fázor napätia na cievke

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{T} = \left(R + \mathbf{j}\omega L\right)\boldsymbol{I} = \frac{R + \mathbf{j}\omega L}{R + \mathbf{j}\omega L + \frac{1}{\mathbf{j}\omega C}}\boldsymbol{U}$$

a fázor napätia na kapacitore

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{C} = \frac{1}{\mathbf{j}\omega C}\boldsymbol{I} = \frac{\dfrac{1}{\mathbf{j}\omega C}}{R + \mathbf{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathbf{j}\omega C}}\boldsymbol{U}\,.$$

Efektívne hodnoty sú

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,, \tag{1}$$

$$U_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,U\,, \tag{2}$$

$$U_\mathrm{C} = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,U\,. \tag{3}$$

c) Zo vzťahov (2) a (3) vyjadríme dve neznáme R a L, napr.

z pomeru vzťahov (3 a (2) vyjadríme

$$R^2 + (\omega L)^2 = \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \frac{U_\mathrm{T}^2}{U_\mathrm{C}^2} \tag{4}$$

a (4) dosadíme do druhej mocniny vzťahu (3)

$$\frac{U_\mathrm{C}^2}{U^2} = \frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2 + \left(\omega L\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2 - 2\,\dfrac{L}{C}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2 \dfrac{U_\mathrm{T}^2}{U_\mathrm{C}^2} + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2 - 2\,\dfrac{L}{C}}\,,$$

odkiaľ vyjadríme indukčnosť

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}\,\frac{U_\mathrm{C}^2 + U_\mathrm{T}^2 - U^2}{2U_\mathrm{C}^2}\ . \tag{5}$$

Dosadením do vzťahu (4) dostávame

$$R = \frac{\sqrt{4U_\mathrm{T}^2 U_\mathrm{C}^2 - \left(U_\mathrm{C}^2 + U_\mathrm{T}^2 - U^2\right)^2}}{2\omega C\, U_\mathrm{C}^2} = \frac{\sqrt{\left[U^2 - \left(U_\mathrm{T} - U_\mathrm{C}\right)^2\right]\left[\left(U_\mathrm{T} + U_\mathrm{C}\right)^2 - U^2\right]}}{2\omega C\, U_\mathrm{C}^2}\,.$$

Pre dané hodnoty: L= 306 mH, R = 271 Ω.

d) Vzťah pre napätie na kapacitore upravíme na tvar

$$U_\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + \left(\omega^2 C L - 1\right)^2}}\,U\,. \tag{6}$$

Vzťah pre U_C má extrém, ak je extrémny výraz f(ω) pod odmocninou v menovateli. Derivácia výrazu

$$\mathrm{f}'(\omega) = 2\omega C^2 R^2 + 2\left(\omega^2 C L - 1\right) 2\,\omega\, C L\,,$$

Z podmienky nulovej derivácie výrazu pre ω_0 dostávame

$$f'(\omega_0) = 2\omega_0\, C^2R^2 + 2\left(\omega_0^2\, C\, L - 1\right) 2\omega_0\, C\, L = 0$$

odkiaľ dostávame uhlovú frekvenciu extrému

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C\,L} - \frac{R^2}{2L^2}}\,. \qquad (7)$$

O aký extrém ide určuje druhá derivácia výrazu f(ω) pre $\omega = \omega_0$.

$$f''(\omega) = 2C^2\left[R^2 - 2\,\frac{L}{C} + 6\,(\omega L)^2\right]$$

a pre ω_0 zo vzťahu (7)

$$f''(\omega_0) = 8C\,L - 4R^2C^2\,.$$

Po dosadení $f''(\omega_0)$ = 3,6×10^-7^ > 0, a preto ide o minimum menovateľa, a teda maximum U_C.

Pozn.: K záveru, že ide o maximum možno dospieť i úvahou.

Ak dosadíme (7) do (6) dostávame

$$U_{C0} = \frac{U}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\;\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{C}{L}\right)R^2}}\,.$$

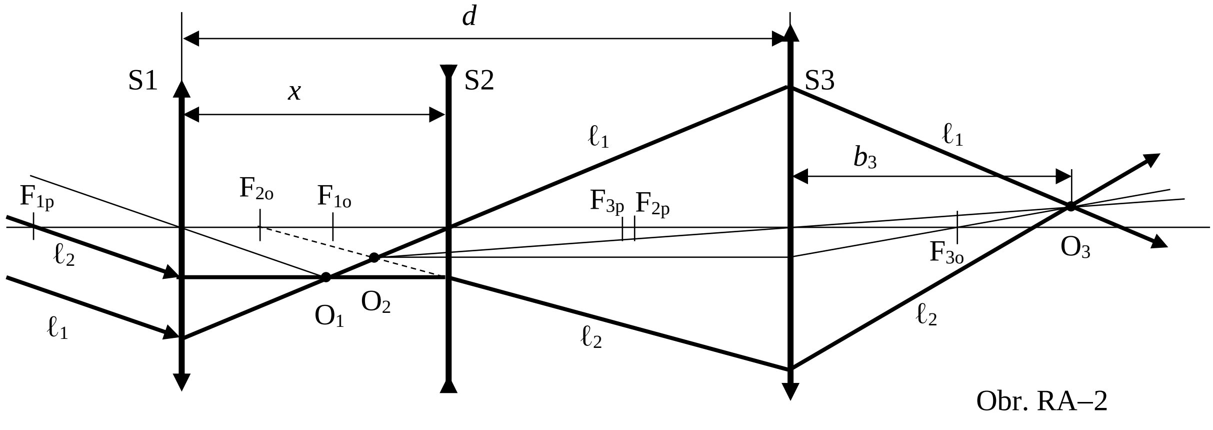
Pre dané hodnoty U_{C0} = 127 V a ω_0 = 4 626 s^{-1}, resp. f_0 = 736 Hz.

3. Sústava troch šošoviek

Riešenie:

a) Obr. RA–2:

i. zostrojenie všetkých troch obrazov O_1, O_2, O_3
ii. zakreslenie vybraného lúča prechádzajúceho celou sústavou (napr. ℓ_1 alebo ℓ_2)
iii. určenie vzdialenosti b_3 – hodnota (37 ± 1) mm.



Obr. RA–2

b) Postupne použijeme zobrazovaciu rovnicu pre jednotlivé šošovky. Predmetové vzdialenosti označíme a a obrazové b.

Pre prvú šošovku S1 je predmetová vzdialenosť $a_1 \to \infty$ (rovnobežné lúče), preto máme pre obrazovú vzdialenosť b_1

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Na druhej šošovke (rozptylke)

$$\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \text{ odkiaľ } b_2 = \frac{f_2\left(x-f_1\right)}{x-f_1-f_2}.$$

Na tretej šošovke

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f_3}, \text{ kde } a_3 = d - x + \left(-b_2\right), \text{ pričom } b_2 < 0.$$

Pre obrazovú vzdialenosť výsledného obrazu dostávame

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{f_3} - \frac{x-f_1-f_2}{\left(d-x\right)\left(x-f_1-f_2\right)-f_2\left(x-f_1\right)}, \text{ pre dané hodnoty } b_3 = 36{,}9 \text{ mm}.$$

c) Podmienka rovnobežných výstupných lúčov je $b_3 \to \infty$, resp. $1/b_3 = 0$. Pre krajné polohy S2

$$\left(\frac{1}{b_3}\right)_{x=0} = \frac{1}{f_3} + \frac{f_2+f_1}{f_1 f_2 - d\left(f_2+f_1\right)} = 0, \text{ resp. } d = f_3 + \frac{f_2}{f_2+f_1} f_1 .$$

$$\left(\frac{1}{b_3}\right)_{x=d} = \frac{1}{f_3} + \frac{d-f_1-f_2}{f_2\left(d-f_1\right)} = 0, \text{ resp. } d = f_1 + \frac{f_2}{f_2+f_3} f_3 .$$

Oba výrazy sú rovnaké, ak platí $f_1 = f_3$.

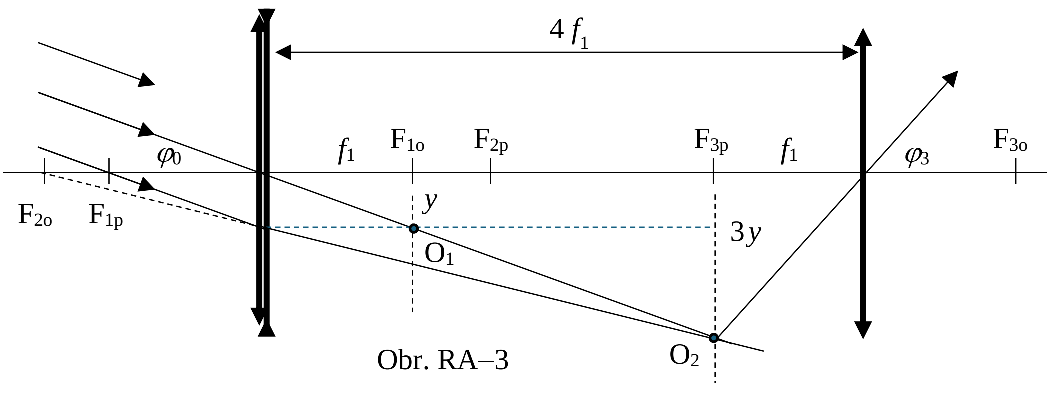
Pre túto podmienku

$$d = f_1 + \frac{f_2}{f_2+f_1} f_1, \text{ odkiaľ } f_2 = -\frac{d-f_1}{d-2f_1} f_1 .$$

d) Obr. RA–3 a obr. RA–4

Pre $d = 4 f_1$ máme $f_2 = -\dfrac{d-f_1}{d-2f_1} f_1 = -\dfrac{3}{2} f_1$. Pre konštrukciu zvolíme napr. $f_1 = f_3 = 20$ mm a $f_2 = -30$ mm.

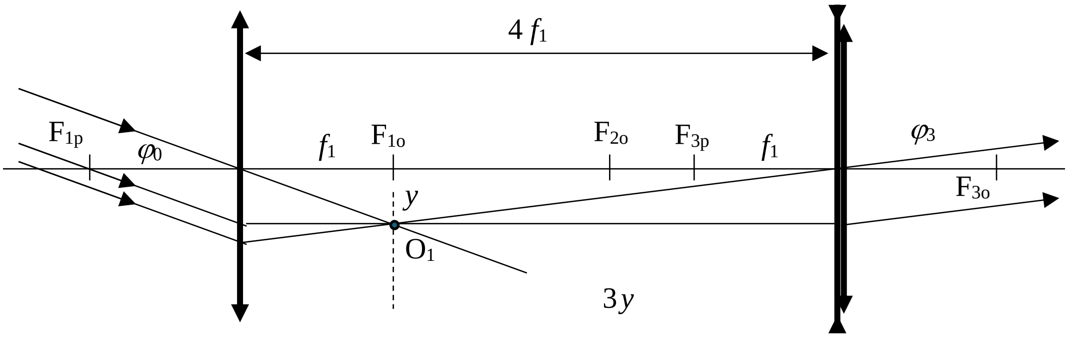
Prvá konštrukcia pre $x = 0$



Obr. RA–3

Uhlové zväčšenie $z_{u1} = \dfrac{\tan\varphi_3}{\tan\varphi_0} = \dfrac{3y/f_1}{y/f_1} = 3$

Druhá konštrukcia pre $x = d$



Obr. RA–4

O2

Uhlové zväčšenie $z_{u2} = \dfrac{\tan\varphi_3}{\tan\varphi_0} = \dfrac{y/3f_1}{y/f_1} = \dfrac{1}{3}$.

Posunutím rozptylky z jednej krajnej pozície do druhej sa uhlové zväčšenie zmení v pomere

$$p = \frac{z_{u1}}{z_{u2}} = 9.$$

4. Rozptyl röntgenového žiarenia

Riešenie:

a) De Broglieho vzťah pre energiu fotónu

$E_f = h\,f = \dfrac{hc}{\lambda}$, odkiaľ máme $\lambda_0 = \dfrac{hc}{E_{f0}}$. Pre dané hodnoty λ_0 = 1,25 pm.

De Broglieho vzťah pre hybnosť fotónu

$p_f = \dfrac{h}{\lambda}$, odkiaľ $p_{f0} = \dfrac{E_{f0}}{c}$. Pre dané hodnoty $p_{f0} = 5{,}34\times10^{-22}$ kg·m·s^{-1}.

Einsteinov vzťah pre pokojovú energiu elektrónu $E_{e0} = m_{e0}\,c^2$, a teda

$E_{f0} = p\,E_{e0}$, kde $\eta = \dfrac{E_{f0}}{E_{e0}} = \dfrac{E_{f0}}{m_0\,c^2}$. Pre dané hodnoty η = 1,95.

b) Celková energia elektrónu

$$E_e = mc^2 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_0}{c}\right)^2}}.$$

Z rovnosti $E_e = E_{f0}$ dostávame po úprave

$v_0 = c\sqrt{1-\left(\dfrac{m_0\,c^2}{E_{f0}}\right)^2}$. Pre dané hodnoty $v_0 = 0{,}859\,c = 2{,}58\times10^8$ m·s^{-1}.

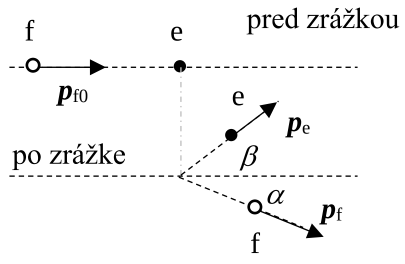
c) Obr. RA–5

Pri pružnej zrážke sa zachováva energia a hybnosť sústavy elektrón–fotón. Po zrážke sa vychýli fotón z pôvodného smeru o uhol α a elektrón sa pohybuje pod uhlom β vzhľadom na pôvodný smer fotónu, obr. R1

$$E_{f0} + E_{e0} = E_f + E_e$$

$$\boldsymbol{p}_{f0} = \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_e .$$

Rovnicu pre hybnosť rozložíme na zložky v pôvodnom smere pohybu fotónu a smere kolmom.



Obr. RA–5

Energiu elektrónu vyjadríme pomocou hybnosti

$$E_e = \sqrt{(p_e c)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2} .$$

Pozn.: Odvodenie vychádza zo vzťahov

$$E_e = mc^2, \quad p_e = mv, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ vylúčením rýchlosti } v.$$

Rovnice pre zrážku dostanú tvar

$$E_{f0} + m_{e0} c^2 = E_f + \sqrt{(p_e c)^2 + \left(m_{e0} c^2\right)^2} \qquad (1)$$

$$\frac{E_{f0}}{c} = \frac{E_f}{c}\cos\alpha + p_e \cos\beta \qquad (2)$$

$$0 = \frac{E_f}{c}\sin\alpha - p_e \sin\beta . \qquad (3)$$

d) Postupne vyjadríme *energiu fotónu*.

Upravíme rovnice (2) a (3)

$$\frac{E_{f0}}{c} - \frac{E_f}{c}\cos\alpha = p_e \cos\beta$$

$$\frac{E_f}{c}\sin\alpha = p_e \sin\beta ,$$

umocníme ich na druhú a sčítame, čím vylúčime uhol β, a dostaneme p_e^2 a dosadíme do (1).

Po úprave potom dostávame

$$E_f = \frac{E_{f0}}{1 + \frac{E_{f0}}{m_0 c^2}(1-\cos\alpha)} .$$

Pre dané hodnoty $E_f = 0{,}636$ MeV.

Vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{hc}{E_f} = \frac{hc}{E_{f0}}\left[1 + \frac{E_{f0}}{m_0 c^2}(1-\cos\alpha)\right].$$ Pre dané hodnoty $\lambda = 1{,}96$ pm.

d) Použijeme rovnicu (1) a dosadíme za energiu E_f a hybnosť p_e

$$\left(E_{f0} + m_0 c^2 - \frac{E_{f0}}{1 + \frac{E_{f0}}{m_0 c^2}(1-\cos\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c\right)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

odkiaľ vyjadríme rýchlosť elektrónu

$$v = c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{1+\dfrac{m_0 c^2}{E_{\mathrm{f0}}(1-\cos\alpha)}}\left(\dfrac{E_{\mathrm{f0}}}{m_0 c^2}\right)\right)^2}}\,.$$

Pre dané hodnoty $v = 0{,}811\,c = 2{,}43\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Celková energia elektrónu

$$E_{\mathrm{e}} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \left(1+\frac{1}{1+\dfrac{m_0 c^2}{E_{\mathrm{f0}}(1-\cos\alpha)}}\left(\frac{E_{\mathrm{f0}}}{m_0 c^2}\right)\right)E_{\mathrm{e0}}\,.$$

Pre dané hodnoty $E_{\mathrm{e}} = 1{,}71\,E_{\mathrm{e0}}$.

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A

Návrh a úprava úloh:	Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh:	Ľubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydalo:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025