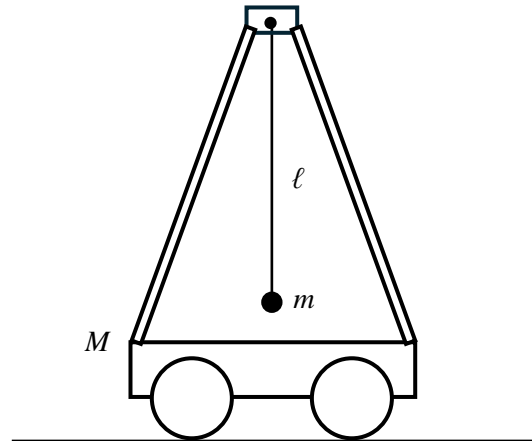


66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
krajské kolo kategória A
text úloh

1. Kyvadlo na vozíku

Chlapci si chceli overiť zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania mechanickej energie. Zostrojili si jednoduchú sústavu podľa obr. A2–1, ktorú umiestnili na vodorovnú podložku. Na vozík pripevnili konštrukciu z tenkých tyčín a na ňu zavesili na tenkom vlákne malú guľôčku s hmotnosťou m . Vzdialenosť stredu guľôčky od bodu závesu vlákna je ℓ . Hmotnosť vozíka s konštrukciou je M . Vozík sa môže voľne pohybovať po vodorovnej podložke (smer osi x). Vlákno s guľôčkou sa môže vychýľovať v zvislej rovine. Konštrukcia umožňuje maximálne vychýlenie z rovnovážnej zvislej polohy o uhol $\varphi_{\max} = 20^\circ$ na obidve strany. Trenie v sústave a moment zotrvačnosti koliesok považujte za zanedbateľne malé. Hmotnosť vozíka je dostatočne veľká, aby sa jeho kolesá neustále dotýkali podložky.



Obr. A2–1

- Najprv vozíku udelili veľmi krátkym impulzom sily vo vodorovnom smere osi x rýchlosť v_0 , a sledovali pohyb vozíka a guľôčky. Po udelení impulzu vozíku sa začalo vlákno s guľôčkou vychýľovať zo zvislej polohy. Určte maximálnu začiatočnú rýchlosť v_{0m} vozíka, aby výchylka vlákna neprekročila hodnotu φ_{\max} na jednu alebo druhú stranu.
- V dôsledku pohybu guľôčky sa menila aj rýchlosť pohybu vozíka. Pre maximálnu výchylku φ_{\max} určte rozdiel maximálnej a minimálnej rýchlosti vozíka vo vzťažnej sústave spojennej s podložkou počas pohybu sústavy vo vodorovnom smere osi x .
- Určte periódu pohybu vlákna závesu pre maximálnu výchylku vlákna $\varphi_m \ll 1$ rad.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnotu pomeru hmotností $p = M/m = 7,5$ a $\ell = 40$ cm. Tiažové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2. Balón

Meteorologický balón po vypustení stúpa, jeho objem sa zväčšuje, až v určitej výške praskne a zavesený vysielateľ sa vráti na padáku na zem.

Predpokladajte, že balón z tenkej latexovej fólie je na začiatku nafúknutý héliom do tvaru gule s priemerom $d_0 = 200$ cm pri teplote $t_0 = 20$ °C. Celková hmotnosť balóna naplneného héliom a so zavesenou sondou je $m = 3,0$ kg. Materiál fólie je poddajný a rozdiel tlaku vo vnútri a mimo balóna je veľmi malý.



- Určte hmotnosť m_{He} hélia v balóne.
- Určte začiatočné zrýchlenie balóna po jeho uvoľnení.

Troposféra dosahuje výšku okolo $h_T = 10$ km a považujeme ju za adiabatickú. To znamená, že zmeny teploty a tlaku vzduchu v tejto vrstve atmosféry sú adiabatické procesy, pričom vzduch považujeme za ideálny plyn s Poissonovou adiabatickou konštantou $\kappa = 1,4$.

- Odvoďte vzťahy pre teplotu T , tlak p a hustotu ρ vzduchu v troposfére ako funkcie výšky h nad povrchom zeme.
- Zistite, ako sa s výškou balóna mení vztlaková sila vzduchu, ktorá na balón pôsobí.
- Balón vydrží dvojnásobné zväčšenie svojho objemu. Zistite, či balón dosiahne až hornú hranicu troposféry, a ak nie, v akej výške h_p praskne.

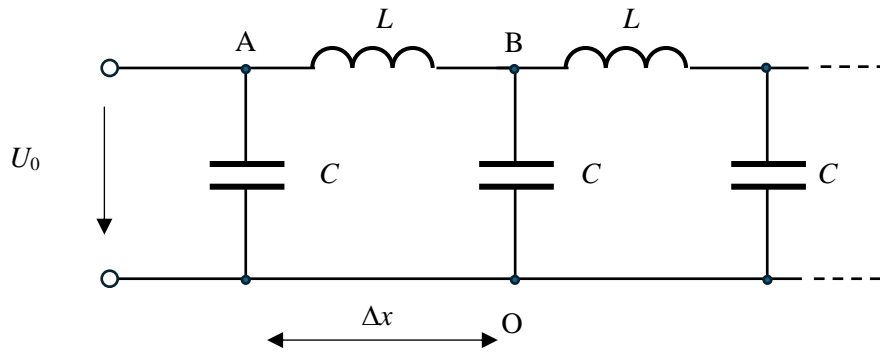
Tlak vzduchu v mieste štartu $p_0 = 103$ kPa, molárna hmotnosť vzduchu $M_m = 29 \times 10^{-3}$ kg·mol⁻¹ a hélia $M_{\text{mHe}} = 4 \times 10^{-3}$ kg·mol⁻¹, molárna plynová konštanta $R = 8,314$ J·K⁻¹·mol⁻¹, tiažové zrýchlenie $g = 9,81$ m·s⁻².

Objem zaveseného vysielateľa je veľmi malý v porovnaní s objemom balóna. Balón stúpa veľmi pomaly, takže teplota a tlak hélia sú rovnaké ako v okolitom prostredí.

3. Vedenie

Na prenos signálu sa používajú dlhé vedenia. Okolo vodičov pod prúdom sa vytvára magnetické pole, ktoré charakterizuje indukčnosť vedenia. Medzi vodičmi vedenia vzniká elektrické pole, ktoré charakterizuje kapacita vedenia.

Uvažujte model vedenia podľa obr. A2-2. Vedenie rozdelíme na rovnaké krátke Γ -úseky s dĺžkou Δx , indukčnosťou $L = \lambda \Delta x$ a kapacitou $C = \kappa \Delta x$. Vstup vedenia je pripojený na zdroj striedavého napätia $U_0 = U_{0m} \sin \omega t$.



Obr. A2-2

- Určte vstupnú komplexnú impedanciu vedenia ako funkciu ω , L a C .
- Zistite rozsah uhlovej frekvencie signálu, v ktorom možno po vedení signál prenášať a medznú frekvenciu f_k tohto intervalu.
- Určte rozdiel fázy $\Delta\varphi$ napätia v uzloch A a B. Vyjadrite fázovú rýchlosť c šírenia pozdĺž vedenia signálu s uhlovou frekvenciou ω . Určte fázovú rýchlosť c_0 pre frekvencie $f \ll f_k$.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty $\lambda = 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $\kappa = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $\Delta x = 10,0 \text{ m}$.

Pomôcka: $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}}$; pre $|x| \ll 1$ platí približný vzťah $\arcsin x \approx x$.

4. Urán

V prírode existujú štyri rozpadové rady, v ktorých sa vyskytuje urán v niekoľkých izotopoch. Jeden z rozpadových radov (uránový) sa začína izotopom ^{238}U s polčasom α -premeny $T_1 = 4,468 \times 10^9$ r, druhý (aktíniový) sa začína izotopom ^{235}U s polčasom α -premeny $T_2 = 7,038 \times 10^8$ r. Okrem nich existuje v prírodnom uráne aj izotop ^{234}U s polčasom α -premeny $T_3 = 2,455 \times 10^5$ r, ktorý vzniká z ^{238}U po α -premene a dvoch následných β -premenách s veľmi krátkymi polčasmi premeny (24,1 d a 1,17 min).

- Určte α -aktivity izotopov ^{238}U a ^{235}U vo vzorke prírodného uránu s hmotnosťou $m = 10$ g.
- Akú časť p_{3u} vzorky prírodného uránu predstavuje ^{234}U , keď sa ich pomer ustáli?

Predpokladajte, že na začiatku je vo vzorke uránu ^{238}U koncentrácia izotopu ^{234}U nulová.

- Odvoďte vzťah pre koncentráciu izotopu ^{234}U ako funkciu času.

Predpokladá sa, že ťažké prvky sa dostali na Zem pri jej vzniku z kozmického materiálu. Odvtedy sa uskutočňuje ich rádioaktívna premena.

- Určte dnešný (tzn. po 4,5 mld rokoch od vzniku Zeme) pomer počtu atómov izotopov ^{234}U a ^{238}U s použitím vzťahu z časti c).

Avogadrova konštanta $N_A = 6,023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. V prírodnej vzorke čistého uránu zastúpenie izotopu ^{238}U je $p_1 = 99,28$ %, kým zastúpenie izotopu ^{235}U je len $p_2 = 0,71$ %.

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy krajského kola kategórie A

Návrh a úprava úloh: Lubomír Konrád 1, Ivo Čáp 2, 3, 4
Recenzia úloh: Lubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
 Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025