66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
krajské kolo kategória A
riešenie úloh

1. Kyvadlo na vozíku

Riešenie:

a) Ak neuvažujeme trenie v sústave, je sústava vo vodorovnom smere x izolovaná, tzn. nepôsobia na ňu vo vodorovnom smere žiadne vonkajšie sily, a tak sú splnené podmienky zachovania hybnosti vo vodorovnom smere x.

$$M\,v_0 = M\,v_\mathrm{v} + m\,v_{\mathrm{g}x}\,. \qquad (1)$$

kde v_v je okamžitá rýchlosť vozíka a $v_{\mathrm{g}x}$ vodorovná zložka okamžitej rýchlosti guľôčky.
Keďže v sústave nepôsobí trenie, zachováva sa aj mechanická energia sústavy v každej inerciálnej vzťažnej sústave. V sústave podložky máme

$$\frac{1}{2}M\,v_0^2 = \frac{1}{2}M\,v_\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}m\,v_\mathrm{g}^2 + m\,g\,h\,, \qquad (2)$$

kde v_g je rýchlosť guľôčky a $h = \ell\left(1-\cos\varphi\right)$ je výška guľôčky vzhľadom na začiatočnú polohu.

Na začiatku je guľôčka v pokoji vzhľadom na podložku, ale v dôsledku uvedenia vozíka do pohybu sa pohne za vozíkom. Vo vzťažnej sústave spojenej s ťažiskom sústavy vozík–guľôčka sa začne vychyľovať proti smeru pohybu vozíka až do krajnej polohy, kedy sa jej pohyb vzhľadom na vozík zastaví. To znamená, že v okamihu maximálneho vychýlenia je rýchlosť vozíka i guľôčky vo všetkých vzťažných sústavách rovnaká, a zároveň rovná rýchlosti v_T pohybu ťažiska sústavy (vo vzťažnej sústave ťažiska). Z rovnice (1) máme

$$M\,v_0 = \left(M+m\right)v_\mathrm{T}\,.$$

Z rovnice (2) dostávame pre maximálnu výchylku φ_m vlákna

$$\frac{1}{2}M\,v_0^2 = \frac{1}{2}\left(M+m\right)v_\mathrm{T}^2 + m\,g\,\ell\left(1-\cos\varphi_\mathrm{m}\right),$$

a po dosadení za v_T a úprave

$$v_0^2 = \frac{M}{M+m}v_0^2 + 2\frac{m}{M}g\,\ell\left(1-\cos\varphi_\mathrm{m}\right)$$

a odtiaľ máme pre $\varphi_\mathrm{m} = \varphi_\mathrm{max}$

$$v_0 = \sqrt{2\frac{M+m}{M}g\,\ell\left(1-\cos\varphi_\mathrm{max}\right)} = \sqrt{2\;\frac{p+1}{p}g\,\ell\left(1-\cos\varphi_\mathrm{max}\right)}\,.$$

Pre dané hodnoty máme $v_{0\mathrm{m}} = 0{,}73\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b) V dôsledku počiatočného impulzu sa guľôčka uvedie do kmitavého pohybu okolo rovnovážnej polohy so zvislým smerom vlákna. Keďže na sústavu nepôsobí vo vodorovnom smere žiadna vonkajšia sila, je vodorovná zložka rýchlosti pohybu ťažiska konštantná

$$v_\mathrm{T} = \frac{M}{M+m}v_0\ .$$

Na vozík a guľôčku pôsobí iba vnútorná sila ťahu vlákna medzi vozíkom a guľôčkou. Najjednoduchšie je sledovať pohyb guľôčky vo vzťažnej sústave spojenej s ťažiskom, ktorá je rovnako ako sústava spojená s podložkou inerciálna. Keďže je začiatočná rýchlosť guľôčky v sústave podložky $v_\mathrm{g} = 0$, je začiatočná rýchlosť guľôčky v sústave ťažiska

$$v_{g0} = v_{gT0} + v_T = 0$$

a rýchlosť vozíka

$$v_0 = v_{vT0} + v_T\,.$$

Keďže v sústave ťažiska je hybnosť sústavy nulová, platí

$$m\,v_{gT0} + M\,v_{vT0} = 0\,.$$

Z týchto rovníc vyjadríme

$$v_{gT0} = -\frac{M}{m}\left(v_0 - v_T\right) = -\frac{M}{M+m}v_0$$

a $$v_{vT0} = -\frac{m}{M}v_{gT0} = v_0 - v_T = \frac{m}{M+m}v_0\,.$$

Keďže v T–sústave vykonáva guľôčka kmitavý pohyb (kyvadlo), je maximálna rýchlosť vozíka pri prechode guľôčky rovnovážnou polohou smerom nazad, tzn. v začiatočnom bode

$$v_{v\max} = v_{vT0} + v_T = \frac{m}{M+m}v_0 + \frac{M}{M+m}v_0 = v_0\,.$$

Minimálna rýchlosť vozíka je pri prechode guľôčky rovnovážnou polohou smerom vpred rýchlosťou

$$v_{gT1} = -v_{gT0} = \frac{M}{M+m}v_0\,.$$

Z podmienky nulovej hybnosti sústavy v T-sústave

$$m\,v_{gT1} + M\,v_{vT1} = 0\text{, odkiaľ } v_{vT1} = -\frac{m}{M}v_{gT1} = -\frac{m}{M+m}v_0\,.$$

Minimálna rýchlosť vozíka

$$v_{v\min} = v_T + v_{vT1} = \frac{M-m}{M+m}v_0\,.$$

Rozdiel rýchlostí pre $v_0 = v_{0m}$

$$v_{v\max} - v_{v\min} = \frac{2m}{M+m}v_{0m} = \frac{2}{p+1}v_{0m} = 2\sqrt{\frac{2}{p\left(p+1\right)}g\,\ell\left(1-\cos\varphi_{\max}\right)}\,.$$

Pre dané hodnoty $v_{v\max} - v_{v\min}$ = 0,17 m·s^{-1}.

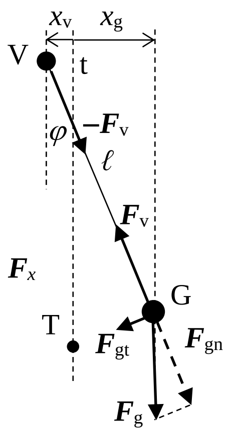
c) Pohyb kyvadla sledujeme v T–sústave, obr. RA2–1.

Priamka t ukazuje polohu ťažiska v smere *x*. Ak sa vlákno vychýli o uhol φ, musí sa bod závesu V, a teda celý vozík, posunúť v opačnom smere ako guľôčka. Aby sa zachovala poloha ťažiska, musí platiť

$$x_v\,M = x_g\,m\,.$$

Pre uhol vychýlenia vlákna platí

$$\sin\varphi = \frac{x_v + x_g}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{m}{M}+1\right)x_g$$



Obr. RA2–1

Na guľôčku pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$. Jej normálová zložka F_{gn} napína vlákno, tangenciálna zložka F_{gt} vyvolá tangenciálne zrýchlenie guľôčky. Pre priemet pohybu do vodorovného smeru dostávame pohybovú rovnicu

$$m\, a_x = -F_{\mathrm{gt}} \cos\varphi \text{, kde } F_{\mathrm{gt}} = m\, g \sin\varphi \,.$$

Po dosadení

$$m\, \ddot{x}_{\mathrm{g}} = -m\, g \sin\varphi \, \cos\varphi = -m\, g \, \frac{1}{\ell}\left(\frac{m}{M}+1\right) x_{\mathrm{g}} \, \cos\varphi \,.$$

Pre malé uhly vychýlenia $\varphi << 1$ rad je $\cos\varphi \approx 1$. Rovnica malých kmitov má potom tvar

$$\ddot{x}_{\mathrm{g}} + g\, \frac{1}{\ell}\left(\frac{m}{M}+1\right) x_{\mathrm{g}} = 0 \,.$$

Ide o rovnicu harmonických kmitov s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\frac{m}{M}+1\right)} \,,$$

a teda s periódou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}\, \frac{M}{M+m}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}\, \frac{p}{p+1}} \,.$$

Pre dané hodnoty T = 1,19 s.

Pozn.: Existujú aj iné spôsoby riešenia úlohy vždy s rovnakými výsledkami, a teda s rovnakým bodovým hodnotením.

2. Balón

Riešenie:

a) Hmotnosť hélia v balóne s objemom $V_0 = \frac{1}{6}\pi\, d_0^3$

$$m_{\mathrm{He}} = \frac{M_{\mathrm{m\,He}}\, p_0}{R T_0}\, \frac{\pi d_0^3}{6} \,.$$ Pre dané hodnoty m_{He} = 0,71 kg.

b) Výsledná sila (v smere nahor), ktorá pôsobí na balón v okamihu štartu (nulová rýchlosť)

$$F = -mg + \rho_0 V_0\, g \text{, kde hustota vzduchu } \rho_0 = \frac{p_0 M_{\mathrm{m}}}{R T_0} \,.$$

Zrýchlenie balóna v smere nahor

$$a = \frac{F}{m} = -g + \frac{\rho_0 V_0\, g}{m} = \left(\frac{\pi\, p_0\, M_{\mathrm{m}}\, d_0^3}{6\, m\, R T_0} - 1\right) g \,.$$ Pre dané hodnoty a = 7,0 m·s^{-2}.

c) Ak vystúpime o výškový rozdiel dh, zmení sa tlak vzduchu

$$\mathrm{d}p = -\rho\, g\, \mathrm{d}h \,. \qquad (1)$$

Predpokladáme, že v atmosfére prebieha adiabatický proces, opísaný Poissonovou rovnicou

$$p V^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa} \,. \qquad (2)$$

Keďže objem nie je možné sledovať (na rozdiel od tlaku a teploty), objem vylúčime pomocou stavovej rovnice

$$p V = \frac{m}{M_{\mathrm{m}}} R\, T \,. \qquad (3)$$

Z rovníc (2) a (3) dostávame

$$p\,T^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} = p_0\,T_0^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}\text{, resp.}\quad p = p_0\,\frac{T^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{T_0^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (4)$$

Derivovaním rovnice dostávame

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{p_0}{T_0^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}\,\frac{\kappa}{\kappa-1}\,T^{\frac{\kappa}{\kappa-1}-1} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\,\frac{p}{T}\,.$$

S použitím (1) a (4) dostávame rovnicu pre teplotnú závislosť výšky

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} = -\frac{\kappa}{\kappa-1}\,\frac{R}{g\,M_{\mathrm{m}}}\,.$$

Keďže derivácia výšky podľa tepoty je konštantná, mení sa teplota lineárne s výškou

$$T = T_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{g\,M_{\mathrm{m}}}{R}\,h\,. \qquad (5)$$

Po dosadení do (4) máme

$$p = p_0\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{g\,M_{\mathrm{m}}}{R\,T_0}\,h\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (6)$$

Ak vyjadríme hustotu vzduchu zo stavovej rovnice (3)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\,M_{\mathrm{m}}}{RT}\,,$$

po dosadení z (6) dostávame

$$\rho = \frac{p_0\,M_{\mathrm{m}}}{RT}\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{g\,M_{\mathrm{m}}}{R\,T_0}\,h\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (7)$$

d) Vztlaková sila

$$F_{\mathrm{v}} = \rho V\,g = \rho V_0\,\frac{p_0}{p}\,\frac{T}{T_0}\,g = \rho_0 V_0\,g\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}\,g\,h\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\frac{\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}\,g\,h\right)}{\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}\,g\,h\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \rho_0 V_0\,g\,.$$

Ako vidíme, vztlaková sila sa s výškou nemení, a preto balón v troposfére stále stúpa ak nepraskne.

e) Vyjadríme závislosť zväčšenia objemu balónu od výšky

$$\eta = \frac{V}{V_0} = \frac{p_0}{p}\,\frac{T}{T_0}\text{, a po dosadení}\quad \eta = \left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}\,g\,h\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}}.$$

Odtiaľ dostávame výšku pre dané zväčšenie objemu balónu (pred prasknutím)

$$h = \frac{\kappa}{\kappa-1}\,\frac{R\,T_0}{M_{\mathrm{m}}\,g}\left(1-\frac{1}{\eta^{\kappa-1}}\right)$$

Pre $\eta = 2$ dostávame výšku $h_{\mathrm{p}} = 7{,}26$ km.

Je zrejmé, že balón praskne ešte pred dosiahnutím výšky h_{T}.

3. Vedenie

Riešenie:

a) Ak odpojíme prvý článok, je vstupná impedancia vzhľadom na uzly BO rovná $\boldsymbol{Z}$. Keďže ide o veľmi dlhé (nekonečné) vedenie, pridaním prvého článku sa vstupná impedancia nemení a platí

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{AO}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L + \boldsymbol{Z}_{\mathrm{BO}}}}, \text{ kde } \boldsymbol{Z}_{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{Z}_{\mathrm{BO}} = \boldsymbol{Z}.$$

Odtiaľ dostaneme kvadratickú rovnicu

$$\boldsymbol{Z}^2 + \mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{Z} - \frac{L}{C} = 0,$$

ktorá má riešenie

$$\boldsymbol{Z} = -\,\mathrm{j}\omega\frac{L}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{L}{C}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Z} = -\,\mathrm{j}\omega\frac{L}{2} + \sqrt{-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{L}{C}}$$

Keďže reálna časť impedancie musí byť nezáporná, vyhovuje znamienko „+“.

b) Ak má vedenie prenášať signál, a teda aj výkon, musí byť činný výkon zdroja nenulový, a to je možné iba vtedy, keď má vstupná impedancia vedenia reálnu zložku. Časť impedancie vyjadrená odmocninou je kladná, ak platí podmienka

$$-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{L}{C} > 0, \text{ a teda } 0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_{\mathrm{k}}.$$

Medzná frekvencia

$$f_{\mathrm{k}} = \frac{\omega_{\mathrm{k}}}{2\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi\Delta x\sqrt{\lambda\kappa}}.$$ Pre dané hodnoty f_{k} = 9,51 MHz.

Pozn.:

Pre $\omega > \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$ je $\boldsymbol{Z} = -\,\mathrm{j}\omega\dfrac{L}{2} + \mathrm{j}\sqrt{\left(\dfrac{\omega L}{2}\right)^2 - \dfrac{L}{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\,\dfrac{\omega^2 L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4}{\omega^2 LC}}\right)$.

Pretože je vstupná impedancia imaginárna, zdroj do vedenie nedodáva činný výkon. Vedenie má kapacitný charakter.

c) Určíme napätie $\boldsymbol{U}_{\mathrm{B}}$ medzi uzlami BO

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z} + \mathrm{j}\omega L} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \left(\dfrac{\omega L}{2}\right)^2} - \mathrm{j}\omega\dfrac{L}{2}}{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \left(\dfrac{\omega L}{2}\right)^2} + \mathrm{j}\omega\dfrac{L}{2}},$$

tzn. komplexný napäťový prenos

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{U}_{\mathrm{B}}}{\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \left(\dfrac{\omega L}{2}\right)^2} - \mathrm{j}\omega\dfrac{L}{2}}{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \left(\dfrac{\omega L}{2}\right)^2} + \mathrm{j}\omega\dfrac{L}{2}} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\varphi}$$

Odtiaľ máme (pre frekvenčný interval prenosu signálu)

$$A=\left|\boldsymbol{A}\right|=\frac{\left|\sqrt{\frac{L}{C}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2}-\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}\right|}{\left|\sqrt{\frac{L}{C}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2}+\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}\right|}=1\,.$$

Z toho vyplýva, že prenos je netlmený.

Čitateľ a menovateľ sú komplexne združené, tzn. majú opačný argument, a teda

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=-\frac{\omega\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L}{C}-\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\omega^2 LC}-1}}\,.$$

Fázová rozdiel je

$$\Delta\varphi=-2\arctan\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\omega^2 LC}-1}}\,.$$

Ak použijeme úpravu naznačenú v zadaní, dostávame

$$\Delta\varphi=-2\arcsin\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}\,.$$

Fázový rozdiel môžeme vyjadriť $\Delta\varphi=-\,\omega\,\Delta t$, pričom posunutie vlny z bodu A do bodu B $\Delta x=c\,\Delta t$. Odtiaľ dostávame

$$c=\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\,\omega=\frac{\omega\,\Delta x}{2\arcsin\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}}=\frac{\frac{\omega\Delta x}{2}}{\arcsin\frac{\omega\Delta x\sqrt{\lambda\kappa}}{2}}\,.$$

Pre nízke frekvencie $\omega \ll \omega_k$ dostávame $c_0\approx\frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa}}$.

Pre dané hodnoty $c_0 = 2{,}99\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4. Urán

Riešenie:

a) Aktivity oboch zložiek vzorky prírodného uránu sú

$$A_1=N_1\frac{\ln 2}{T_1}\quad \text{a}\quad A_2=N_2\frac{\ln 2}{T_2}\,,$$

kde $N_1=n_1 N_A=\frac{p_1 m}{M_{m1}}N_A$ a rovnako $N_2=\frac{p_2 m}{M_{m2}}N_A$,

pričom $M_{m1} = 238\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ a $M_{m2} = 235\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Pre dané hodnoty $A_1 = 1{,}235\times10^5$ Bq, $A_2 = 5{,}68\times10^3$ Bq.

b) Izotop ^{238}U sa po α–premene prakticky okamžite mení dvomi β–premenami na izotop ^{234}U, a ten sa potom ďalej mení α–premenou na nasledujúci izotop (^{230}Th). V ustálenom stave je aktivita izotopu ^{238}U rovnaká ako aktivita izotopu ^{234}U (koľko atómov vznikne, toľko zanikne).

$$N_1 \frac{\ln 2}{T_1} = N_3 \frac{\ln 2}{T_3},$$

odkiaľ máme

$$p_{3\mathrm{u}} = \frac{N_3}{N_1 + N_3} = \frac{T_3}{T_1 + T_3}$$. Pre dané hodnoty p_3 = 0,0055 %.

c) Atómov izotopu ^{234}U pribúda premenou ^{238}U a ubúda vlastnou premenou. Celková zmena

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}N_{3\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = N_0 \frac{\ln 2}{T_1} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} - N_3 \frac{\ln 2}{T_3}.$$

Dostávame nehomogénnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} + N_3 \frac{\ln 2}{T_3} = N_0 \frac{\ln 2}{T_1} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}.$$

Najprv riešime homogénnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}N_{3\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t} + N_{3\mathrm{h}} \frac{\ln 2}{T_3} = 0, \text{ resp. } \frac{\mathrm{d}N_{3\mathrm{h}}}{N_{3\mathrm{h}}} = -\frac{\ln 2}{T_3}\mathrm{d}t$$

a po integrácii

$$\int \frac{\mathrm{d}N_{3\mathrm{h}}}{N_{3\mathrm{h}}} = -\int \frac{\ln 2}{T_3}\mathrm{d}t, \text{ a teda } \ln N_{3\mathrm{h}} = -\frac{\ln 2}{T_3}t + \mathrm{C}.$$

Hľadáme partikulárne riešenie pre exponenciálnu pravú stranu v tvare $N_{3\mathrm{p}} = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}$.

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice dostávame

$$-\mathrm{A}\frac{\ln 2}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} + \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}\frac{\ln 2}{T_3} = N_0 \frac{\ln 2}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}, \text{ odkiaľ } \mathrm{A} = N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}.$$

Celkové riešenie

$$N_3 = N_{3\mathrm{h}} + N_{3\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_3}t + \mathrm{C}} + N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} = \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_3}t} + N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}.$$

Použijeme začiatočnú podmienku $N_3 = 0$ pre $t = 0$

$$0 = \mathrm{K} + N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}, \text{ a teda } \mathrm{K} = -N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}.$$

$$N_3 = N_0 \frac{T_3}{T_1 - T_3}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_3}t}\right).$$

Pomer počtu atómov ^{234}U a ^{238}U v súčasnosti, tzn. v čase t_Z = 4,5 mld rokov

$$p = \frac{N_3}{N_1 + N_3} = \frac{T_3}{T_1}\frac{1 - \mathrm{e}^{-\ln 2\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}\right)t_\mathrm{Z}}}{1 - \frac{T_3}{T_1}\mathrm{e}^{-\ln 2\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}\right)t_\mathrm{Z}}}.$$

Pre dané hodnoty p = 0,0055 %.

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy krajského kola kategórie A

Návrh a úprava úloh:	Ľubomír Konrád 1, Ivo Čáp 2, 3, 4
Recenzia úloh:	Ľubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydalo:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2025