MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh školského kola kategórie C

1 Štvorcovú tabuľku 4×4 vyfarbujeme štyrmi rôznymi farbami tak, aby každé políčko tabuľky bolo vyfarbené práve jednou farbou. Rozhodnite, či je možné nájsť vyfarbenie, v ktorom bude každá farba v každej z deviatich menších tabuliek 2×2 a tiež

a) v každom riadku a v každom stĺpci,

b) v každom riadku.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Štvorce 2×2 pre zjednodušenie zápisu pomenujeme ľavý horný, horný, pravý horný, ľavý, prostredný, pravý, ľavý dolný, dolný, pravý dolný a farby označíme A, B, C, D.

a) Ukážeme sporom, že tabuľka sa nedá vyplniť požadovaným spôsobom. Predpokladajme, že tabuľka 4×4 sa dá vyplniť farbami A, B, C, D požadovaným spôsobom. Uvažujme prostredný štvorec 2×2. Nech sú jeho štyri políčka (bez ujmy na všeobecnosti) vyplnené štyrmi rôznymi farbami tak ako na obrázku.

	D		
D	A	B	
	C	D	

Podľa zadania potom však v druhom políčku prvého riadka už nemôže byť ani farba C, pretože v druhom stĺpci už farba C je, a ani farby A a B, pretože tieto farby sú už obsiahnuté v hornom štvorci 2×2. Preto v druhom políčku prvého riadka musí byť farba D. Z podobného dôvodu musí byť farba D aj v prvom políčku druhého riadka. To však znamená, že v ľavom hornom štvorci 2×2 je farba D dvakrát, čo je spor.

b) Tabuľka sa dá požadovaným spôsobom zafarbiť, a to napríklad takto:

A	B	C	D
C	D	A	B
A	B	C	D
C	D	A	B

Riešenie 2:

a) Začnime od horného riadka, ten zafarbíme bez ujmy na všeobecnosti farbami A, B, C, D v tomto poradí.

Políčka v druhom riadku už potom majú jednoznačné zafarbenie postupne C, D, A, B, pretože na prvých dvoch musia kvôli podmienke na ľavý horný štvorec 2×2 byť farby C, D a zároveň C nemôže byť (kvôli podmienke na horný štvorec) na druhom políčku. Podobne B môže byť len na poslednom políčku.

A	B	C	D
C	D	A	B

Aplikovaním rovnakej úvahy na tretí riadok odvodíme, že v jeho políčkach musia byť postupne farby A, B, C, D. Potom však bude v prvom stĺpci farba A dvakrát, čo je spor.

A	B	C	D
C	D	A	B
A	B	C	D

Tabuľka sa teda vyplniť požadovaným spôsobom nedá.

b) Ako v riešení 1.

Riešenie 3:

a) Ak druhé políčko druhého riadka zafarbíme jednou z daných štyroch farieb, tak musí byť táto farba v prvom riadku (podľa podmienky na ľavý horný a horný štvorec) jedine vo štvrtom políčku a v treťom riadku (podľa podmienky na ľavý a prostredný štvorec) tiež jedine vo štvrtom políčku. To už je spor, pretože vo štvrtom stĺpci bude táto farba dvakrát. Tabuľka sa teda vyplniť požadovaným spôsobom nedá.

b) Ako v riešení 1.

Pokyny:

5 bodov dajte za časť a) a 1 bod za časť b).

Za nepresnú alebo neúplnú argumentáciu v časti a) strhnite najviac 2 body.

---

2 Dané sú dve kladné prirodzené čísla také, že ich súčet je prvočíslo 313, ktoré je navyše deliteľom súčtu ich najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku. Nájdite tieto čísla.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Označme hľadané čísla a a b.

Všimnime si najskôr, že čísla a, b sú nesúdeliteľné. Ak by totiž boli súdeliteľné, ich súčet by bol deliteľný ich najväčším spoločným deliteľom, a nemohol by tak byť prvočíslom. Teda najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je 1 a ich najmenší spoločný násobok je ab. Naše podmienky tak znamenajú, že $a + b = 313$ a $313 \mid ab + 1$.

Ďalej máme niekoľko spôsobov, ako pokračovať v riešení:

1) Keďže $313 = a + b$, podmienka zo zadania má tvar $313 \mid (313 - b)b + 1$, t. j. $313 \mid b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$. Keďže 313 je prvočíslo, platí $313 \mid b - 1$ alebo $313 \mid b + 1$. Vzhľadom na to, že $313 = a + b > b > 0$, máme buď $313 = b + 1$, alebo $b - 1 = 0$. Prvý prípad dáva riešenie $b = 312$, $a = 1$, druhý riešenie $b = 1$, $a = 312$.

2) Platí
$$ab + 1 = ab + 1 - a - b + a + b = (a - 1)(b - 1) + (a + b) = (a - 1)(b - 1) + 313,$$
z čoho vyplýva, že 313 je deliteľom $(a - 1)(b - 1)$. Keďže 313 je prvočíslo a $a, b < 313$, vyplýva z toho $(a - 1)(b - 1) = 0$, takže $a = 1$ a $b = 312$ alebo $b = 1$ a $a = 312$.

3) Keďže $313 = a + b$, platí $313 \mid a(a + b)$, a pretože platí aj $313 \mid ab + 1$, dostávame
$$313 \mid a(a + b) - (ab + 1) = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$
Keďže 313 je prvočíslo, máme $313 \mid a - 1$ alebo $313 \mid a + 1$. V prvom prípade $a = 1$, $b = 312$, lebo $313 = a + b > a - 1$. V druhom prípade $a = 312$, $b = 1$, lebo $313 = a + b \geq a + 1$.

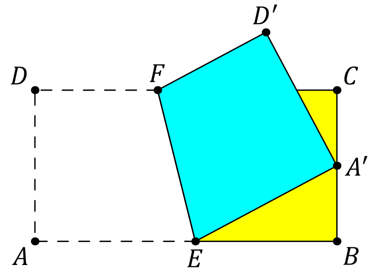
Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe dvojice $(312, 1)$ a $(1, 312)$ nazoaj vyhovujú.

Pokyny:

Za tvrdenie, že čísla a a b sú nesúdeliteľné, dajte 1 bod. Za prepis podmienok na $a + b = 313$ a $313 \mid ab + 1$ dajte ďalší 1 bod. Za dokončenie riešenia dajte 4 body. Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

---

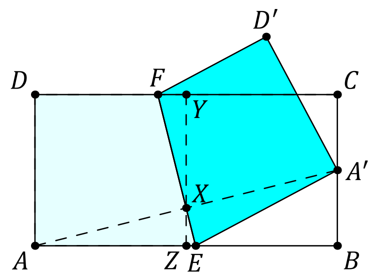
3 Hárok papiera $ABCD$ s rozmermi 2×1 preložíme pozdĺž úsečky EF ako na obrázku tak, že vrchol A splynie so stredom A' úsečky BC a vrchol D splynie s bodom D'. Určte obsah štvoruholníka $A'D'FE$.



(Tomáš Bárta)

Riešenie 1:

Označme Y a Z postupne stredy strán CD a AB a X priesečník YZ s AA'. Potom je XZ rovnobežné s BC, a keďže Z je stred strany AB, je XZ strednou priečkou trojuholníka ABA'. Preto je X stredom úsečky AA' a platí
$$|XZ| = \frac{1}{2}\,|A'B| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,|BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$



Keďže $|AE| = |EA'|$, trojuholník AEA' je rovnoramenný, a preto je jeho ťažnica XE kolmá na AA'. Z toho vyplýva, že

$$|\sphericalangle ZXE| = 90° - |\sphericalangle AXZ| = 90° - (90° - |\sphericalangle EAX|) = |\sphericalangle EAX|\,.$$

Pravuhlé trojuholníky XZE a ABA' sú preto podobné podľa vety *uu*. Preto

$$|ZE| : |A'B| = |XZ| : |AB| = \frac{1}{4} : 2 = 1 : 8.$$

Odtiaľ

$$|ZE| = \frac{1}{8}\,|BA'| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Trojuholníky XYF a XZE sú podobné opäť podľa vety *uu*, pričom

$$|XY| : |XZ| = \left(1 - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4} = 3 : 1.$$

Preto

$$|FY| = 3\,|ZE| = \frac{3}{16}.$$

Ďalej

$$|AE| = |AZ| + |ZE| = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

a

$$|DF| = |DY| - |FY| = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

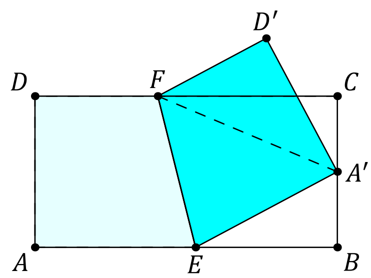
Podľa vzorca pre obsah lichobežníka platí

$$\mathrm{S}(A'EFD') = \mathrm{S}(AEFD) = \frac{|AE| + |FD|}{2} = \frac{\frac{17}{16} + \frac{13}{16}}{2} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}.$$

Riešenie 2:

$AEFD$ je lichobežník, takže

$$\mathrm{S}(A'EFD') = \mathrm{S}(AEFD) = \frac{|AE| + |FD|}{2} = \frac{|A'E| + |FD'|}{2}.$$



Z Pytagorovej vety pre trojuholník EBA' máme

$$|A'E|^2 = |BE|^2 + |A'B|^2\,,$$

$$|A'E|^2 = (|AB| - |AE|)^2 + \left(\frac{1}{2}\,|CB|\right)^2,$$

$$|A'E|^2 = (2-|A'E|)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$|A'E|^2 = 4 - 4\,|A'E|^2 + |A'E|^2 + \frac{1}{4},$$

$$4\,|A'E| = 4 + \frac{1}{4},$$

$$|A'E| = 1 + \frac{1}{16},$$

$$|A'E| = \frac{17}{16}.$$

Podobne pomocou Pytagorovej vety pre trojuholníky $FA'D'$ a $FA'C$ vyjadríme dvojakým spôsobom druhú mocninu dĺžky prepony FA':

$$|FA'|^2 = |A'D'|^2 + |FD'|^2$$

a

$$|FA'|^2 = |FC|^2 + |A'C|^2,$$

z čoho

$$|A'D'|^2 + |FD'|^2 = |FC|^2 + |A'C|^2,$$

$$|AD|^2 + |FD'|^2 = (|CD| - |FD|)^2 + \left(\frac{1}{2}\,|CB|\right)^2,$$

$$1^2 + |FD'|^2 = (2-|FD'|)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2,$$

$$1 + |FD'|^2 = 4 - 4\,|FD'| + |FD'|^2 + \frac{1}{4},$$

$$4\,|FD'| = 3 + \frac{1}{4},$$

$$4\,|FD'| = \frac{12+1}{4},$$

$$4\,|FD'| = \frac{13}{4},$$

$$|FD'| = \frac{13}{16}.$$

Dokopy

$$S(A'EFD') = \frac{|A'E| + |FD'|}{2} = \frac{\frac{17}{16} + \frac{13}{16}}{2} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}.$$

Pokyny:

Za zdôvodnené tvrdenie o podobnosti trojuholníkov z prvého riešenia dajte 2 body, 3 body pokiaľ je určený a zdôvodnený aj správny koeficient podobnosti.

V oboch riešeniach za správny výpočet dĺžky jednej z úsečiek AE alebo DF dajte 3 body a za správny výpočet dĺžok oboch úsečiek 5 bodov. Za správny finálny výpočet obsahu lichobežníka dajte 1 bod. Len za uvedenie vzorca pre obsah lichobežníka body neudeľujte.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzent: Jana Kopfová
- preklad: Peter Novotný
- korektor: Stanislav Krajči