MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1 Z cifier 1 až 9 vytvoríme deväťciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom každú jeho dvojicu po sebe idúcich cifier interpretujeme ako dvojciferné číslo.

a) Najviac koľko mocnín prvočísel s celočíselným exponentom väčším ako 1 môže byť medzi týmito 8 dvojcifernými číslami?

b) Koľko rôznych deväťciferných čísel nás k tomuto počtu dovedie?

(Dominik Martin Rigász)

Riešenie:

Najprv si vypíšeme všetky dvojciferné prvočíselné mocniny s celočíselným exponentom väčším ako 1 postupne podľa prvočísel, ktoré sú ich základom: 16, 32, 64, 27, 81, 25, 49. Pre prvočísla 11 a väčšie sú takéto ich mocniny aspoň trojciferné. Čísla 25 a 27 nemôžu byť naraz medzi vytvorenými dvojcifernými číslami, preto medzi nimi nemôže byť viac ako 6 týchto prvočíselných mocnín. Ďalej ukážeme, že 6 mocnín možno dosiahnuť, pričom zároveň zodpovieme aj otázku z časti b).

Aby sme dosiahli 6 týchto mocnín prvočísel, tak medzi nimi musí byť každé z čísel 16, 32, 64, 81, 49. Čísla 81, 16, 64, 49 musia byť napísané v tomto poradí, lebo majú spoločné cifry a každá cifra sa vyskytuje len raz. Hľadané číslo tak musí obsahovať blok cifier 81649. Ak je medzi číslami 25, tak číslo musí obsahovať aj blok 325. Ostala nám ešte cifra 7. Hľadané číslo sa tak musí skladať z troch blokov cifier 81649, 325, 7. Zároveň každé číslo vytvorené z týchto blokov (v ľubovoľnom poradí) zjavne vyhovuje podmienkam zo zadania. Možností usporiadania blokov je $3 \cdot 2 \cdot 1$ čiže 6, pretože prvý blok (najviac vľavo) vyberáme spomedzi 3 možných, druhý spomedzi 2 a na záver nám ostane 1 blok.

Ak by medzi číslami namiesto 25 bolo 27, dostali by sme rovnako tri bloky čísel 81649, 327, 5, ktoré vieme opäť usporiadať 6 spôsobmi.

Preto najväčší počet prvočíselných mocnín s celočíselným exponentom väčším ako 1 medzi týmito číslami je 6 a dovedie nás k nemu $6 + 6$ čiže 12 počiatočných deväťmiestnych čísel.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

- A1 Vypísanie všetkých dvojciferných mocnín prvočísel: 1 bod.
- A2 Zdôvodnenie, že medzi číslami nemôže byť všetkých 7: 1 bod.
- A3 Objavenie, že hľadané číslo musí obsahovať isté bloky cifier (1 bod udeľte aj v prípade, keď niektorý blok je nesprávny alebo chýba): 1 bod.
- A4 Uvedenie jedného príkladu čísla, pre ktoré dostaneme 6 mocnín: 1 bod.
- A5 Určenie počtu všetkých východiskových deväťciferných čísel (či už výpočtom alebo vypísaním): 3 body.

Počet bodov za krok Xi označíme x_i.

Celkovo za neúplné riešenie udeľte $a_1+a_2+a_3+\max(a_4, a_5)$ bodov. Za časť a) udeľte najviac 3 body ($a_1+a_2+a_4$).

Ak riešiteľ nesprávne vypíše požadované mocniny, udeľte za časť A1 0 bodov.

Za zvyšné časti môžete udeliť plný počet bodov, ak riešiteľ vo svojom riešení použil ekvivalentné alebo náročnejšie myšlienky. Napr. pokiaľ riešiteľ len zabudne na 49, princíp riešenia úlohy sa nezmení a môže získať až 5 bodov.

Ak riešiteľ zabudne na 27, nemôže získať body za A2, pretože v takom prípade je možné získať všetky riešiteľom nájdené mocniny, takže môže získať najviac 4 body.

---

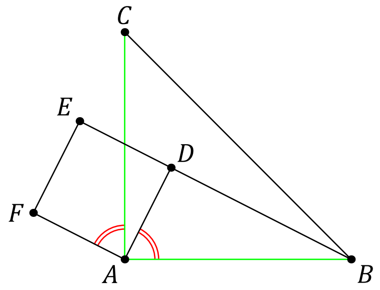
2 Vnútri pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC s preponou BC leží bod D taký, že priamky AD a BD sú na seba kolmé. V polrovine určenej priamkou AD neobsahujúcej bod B leží štvorec $ADEF$. Dokážte, že priamka EF prechádza bodom C.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

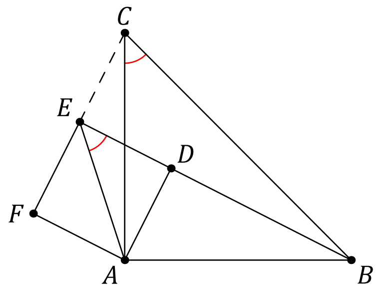
Trojuholníky ABD a ACF majú rovnako dlhé dve strany: $|AB| = |AC|$ (ramená trojuholníka ABC) a $|AD| = |AF|$ (strany štvorca $ADEF$). Taktiež tieto spoločné strany zvierajú rovnaký uhol, pretože platí $|\sphericalangle BAD| = 90^\circ -$

$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAF|$. Preto sú trojuholníky ABD a ACF zhodné podľa vety *sus*. Z toho vyplýva, že priamka CF je kolmá na stranu AF. Rovnako je však na stranu AF kolmá aj priamka EF. Preto na priamke EF leží aj bod C.



Riešenie 2:

Všimnime si, že $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AED| = 45° = |\sphericalangle ACB|$ (a bod E zjavne leží v polrovine ABC), takže body A, E, C, B ležia na kružnici podľa vety o obvodových uhloch. Tým pádom $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAC| = 90°$. Keďže $|\sphericalangle FEB| = 90°$, platí $|\sphericalangle FEC| = 180°$. Preto priamka EF prechádza bodom C.



Riešenie 3:

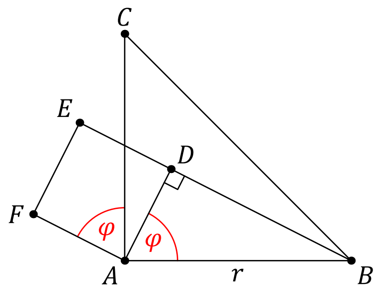
Označme r dĺžku ramien trojuholníka ABC a φ veľkosť uhla DAB. Z pravouhlého trojuholníka ABD vyjadríme dĺžku strany štvorca: $|AD| = r\cos\varphi$. Platí tiež

$$|\sphericalangle CAF| = 90° - |\sphericalangle DAC| = 90° - (90° - \varphi) = \varphi.$$

Nech priamka FE pretne priamku AC v bode C'. Z pravouhlého trojuholníka $C'AF$ dostávame

$$|C'A| = \frac{|AF|}{\cos\varphi} = \frac{r\cos\varphi}{\cos\varphi} = r.$$

Teda priamka FE pretína priamku AC vo vzdialenosti r od bodu A a zjavne v polrovine ABC. To však znamená, že bod C' splýva s bodom C, a teda priamka EF prechádza bodom C.

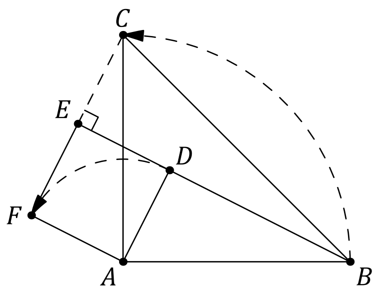


Poznámka:

Parametrami r a φ je jednoznačne popísaná celá situácia: Tvar trojuholníka ABC vyplýva z toho, že je rovnoramenný a pravouhlý, r určuje jeho veľkosť a poloha bodu D je určená uhlami DAB a ADB. Preto možno očakávať, že akékoľvek ďalšie potrebné uhly a vzdialenosti bude možné vyjadriť pomocou r a φ.

Riešenie 4:

V otočení so stredom v bode A o $90°$ sa bod B zobrazí na bod C a bod D sa zobrazí na bod F. Priamka BD sa tak v tomto otočení zobrazí na priamku CF, preto sú kolmé. Avšak na priamku BD je kolmá aj priamka EF. Preto priamky EF a CF splývajú, takže EF prechádza bodom C.



Pokyny:

Počet bodov za krok X označíme x, počet bodov za krok Xi označíme x_i.

V neúplných riešeniach rozdeľte body nasledovne:

- K Dôkaz, že niektorý z uhlov CEB a CFA je pravý, alebo podobné tvrdenie, z ktorého priamo vyplýva, že priamka EF prechádza bodom C: 5 bodov.
- Z Konštatovanie, že z predošlého bodu vyplýva dokazované tvrdenie: 1 bod. (Tento bod udeľte, aj ak dôkaz z A1 nie je úplný alebo aj keď riešiteľ len zredukuje dôkaz tvrdenia z úlohy na dôkaz kolmosti priamok.)

Neúplné dôkazy ohodnoťte podľa nasledovných schém:

Pri postupe podľa riešenia 1:

- A1 Dôkaz $|\sphericalangle CAF| = |\sphericalangle DAB|$: 2 body.
- A2 Dôkaz, že trojuholníky ABD a ACF sú zhodné: 4 body.

Pri postupe podľa riešenia 2:

- B1 Hypotéza, že body A, E, C, B ležia na jednej kružnici: 1 bod.
- B2 Dôkaz hypotézy: 3 body.

Pri postupe podľa riešenia 3:

- C1 Vyjadrenie dĺžky strany štvorca $ADEF$ pomocou dĺžky ramena, resp. podobný vzťah medzi ramenom a stranou štvorca: 1 bod.
- C2 Dôkaz $|\sphericalangle CAF| = |\sphericalangle DAB|$: 2 body.

Pri postupe podľa riešenia 4:

- D1 Konštatovanie, že bod B sa zobrazí na bod C v otočení o 90° okolo bodu A: 1 bod.
- D2 Konštatovanie, že v rovnakom otočení sa zobrazí D na F: 1 bod.
- D3 Konštatovanie, že preto sa priamka BD zobrazí na CF: 2 body.

Celkovo potom za neúplné riešenia udeľte $\max(\max(a_1, a_2), b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2 + d_3, k) + z$ bodov.

---

3 Pre kladné celé čísla r a s platí, že číslo r/s leží v uzavretom intervale $[23/45, 46/89]$. Akú najmenšiu hodnotu môže mať číslo s?

(Pavel Calábek)

Riešenie 1:

Keďže $23/45 > 1/2$, platí aj $r/s > 1/2$. Z toho vyplýva, že $s < 2r$, teda $s \leq 2r - 1$. Preto

$$\frac{r}{2r-1} \leq \frac{r}{s},$$

no zároveň podľa zadania

$$\frac{r}{s} \leq \frac{46}{89},$$

preto platí

$$\frac{r}{2r-1} \leq \frac{46}{89},$$

$$89r \leq 46(2r-1),$$

$$89r \leq 92r - 46,$$

$$46 \leq 3r,$$

preto

$$r \geq 16.$$

Z nerovnosti $r/s \leq 46/89$ potom dostaneme

$$s \geq 89r/46 \geq 89 \cdot 16/46,$$

$$s \geq 31.$$

Táto hodnota je dosiahnuteľná, pretože číslo $16/31$ sa naozaj nachádza v požadovanom intervale.

Teda hľadaná najmenšia hodnota čísla s je 31.

Poznámka:

Dôkaz nerovnosti $r \geq 16$ možno formulovať aj nepriamo alebo sporom: Ak by platilo $r < 16$, tak by číslo r/s neležalo v požadovanom intervale pre žiadne s – v prípade $s \geq 2r$ by sme mali $r/s \leq 1/2 < 23/45$ a v prípade $s = 2r - 1$ by už číslo $r/(2r-1)$ bolo väčšie ako $46/89$, čo rovnako platí aj pre menšie hodnoty s.

Riešenie 2:

Keďže $r/s \geq 24/45 > 1/2$, platí $r > s/2$. Ďalej budeme samostatne uvažovať párne a nepárne s:

- Nech je s párne, t. j. $s = 2k$ pre nejaké kladné celé k. Zo vzťahu $r > 2k/2 = k$ dostávame $r \geq k + 1$. Taktiež však platí

  $$\frac{k+1}{2k} \leq \frac{r}{s} \leq \frac{46}{89},$$

  z čoho

  $$\frac{k+1}{2k} \leq \frac{46}{89},$$

  $$89(k+1) \leq 46 \cdot 2k,$$

  $$89k + 89 \leq 92k,$$

  $$89 \leq 3k,$$

  teda

  $$k \geq 30.$$

  Pre párne s tak platí $s \geq 2 \cdot 30 = 60$.

- Nech s je nepárne, t. j. $s = 2k - 1$ pre nejaké kladné celé k. Z podmienky $r > s/2$ dostaneme $r \geq k$. Keďže platí

  $$\frac{k}{2k-1} \leq \frac{r}{s} \leq \frac{46}{89},$$

  dostávame

  $$\frac{k}{2k-1} \leq \frac{46}{89},$$

  $$89k \leq 46(2k-1),$$

  $$89k \leq 92 - 46,$$

  $$46 \leq 3k,$$

  a teda

  $$k \geq 16.$$

  To znamená, že $s \geq 2 \cdot 16 - 1 = 31$.

Takto sme dostali, že v oboch prípadoch platí $s \geq 31$. Táto hodnota je naozaj dosiahnuteľná, pretože jej zodpovedá $r = k = 16$. Vtedy sa číslo $16/31$ naozaj nachádza v intervale $[23/45, 46/89]$.

Poznámka:

Odhad $s \geq 31$ môžeme získať aj bez delenia podľa parity s. Z nerovnosti $r > s/2$ vyplýva $r \geq (s+1)/2$. Potom máme

$$\frac{\frac{s+1}{2}}{s} \leq \frac{r}{s} \leq \frac{46}{89},$$

teda

$$89(s+1) \leq 46 \cdot 2s,$$

z čoho dostaneme $s \geq 30$. Avšak v prípade $s = 30$ je $r \geq 31/2$, teda $r \geq 16$, kedy $r/30 \geq 16/30 > 46/89$. Preto musí platiť odhad $s \geq 31$.

Riešenie 3:

Podľa zadania má platiť

$$\frac{23}{45} \leq \frac{r}{s} \leq \frac{46}{89},$$

po odstránení zlomkov máme $23s \leq 45r$ a $89r \leq 46s$. Po vynásobení prvej nerovnosti dvomi tak máme

$$89r \leq 46s \leq 90r.$$

Po odčítaní $92r$ dostaneme

$$-3r \leq 46s - 92r \leq -2r,$$

z čoho po vynásobení -1 dostávame

$$3r \geq 46(2r - s) \geq 2r.$$

Z druhej nerovnosti vyplýva, že $2r - s$ je kladné, t. j. $2r - s \geq 1$, z prvej dostávame $3r \geq 46$, čím dostávame $r \geq 16$. Z nerovnosti $89r \leq 46s$ potom dostaneme $s \geq 89 \cdot 16/46$, teda $s \geq 31$.

Hodnota $s = 31$ je dosiahnuteľná, pretože $16/31 \in [23/45, 46/89]$.

Riešenie 4:

Podľa zadania platí pre prevrátené číslo

$$\frac{89}{46} \leq \frac{s}{r} \leq \frac{45}{23},$$

t. j.

$$1 + \frac{43}{46} \leq \frac{s}{r} \leq 1 + \frac{22}{23}.$$

Odtiaľ plynie

$$\frac{43}{46} \leq \frac{s}{r} - 1 \leq \frac{22}{23},$$

t. j.

$$\frac{43}{46} \leq \frac{s - r}{r} \leq \frac{22}{23}.$$

Číslo $s - r$ je preto kladné a po opätovnom prevrátení platí

$$\frac{23}{22} \leq \frac{r}{s - r} \leq \frac{46}{43},$$

t. j.

$$1 + \frac{1}{22} \leq \frac{r}{s - r} \leq 1 + \frac{3}{43},$$

$$\frac{1}{22} \leq \frac{r}{s - r} - 1 \leq \frac{3}{43},$$

$$\frac{1}{22} \leq \frac{2r - s}{s - r} \leq \frac{3}{43}.$$

Preto aj číslo $2r - s$ musí byť kladné a podobne ďalej máme

$$\frac{43}{3} \leq \frac{s - r}{2r - s} \leq 22,$$

t. j.

$$14 + \frac{1}{3} \leq \frac{s - r}{2r - s} \leq 22.$$

Keďže $2r - s \geq 1$, platí $s - r \geq 14 + 1/3$, teda $s - r \geq 15$. Opätovným využitím $2r - s \geq 1$ tak dostávame $r + 15 \leq s \leq 2r - 1$. To nám dáva $r \geq 16$ a následne $s \geq 31$.

Hodnota $s = 31$ je dosiahnutá pre číslo $16/31$ z $[23/45, 46/89]$,

Pokyny:

Počet bodov za krok X označíme x, počet bodov za krok Xi označíme x_i.

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

A Uvedenie správneho výsledku $s = 31$ spolu s konštatovaním, že číslo $16/31$ patrí do požadovaného intervalu: 1 bod.

B1 Dôkaz nerovnosti $s \geq 31$ buď pre všetky nepárne s, alebo pre všetky párne s: 3 body.

B2 Dôkaz nerovnosti $r \geq 16$: 4 body.

B3 Dôkaz nerovnosti $s \geq 30$: 4 body.

B4 Dôkaz nerovnosti $s \geq 31$: 5 bodov.

Pri postupe podľa vzorového riešenia 1:

D1 Dôkaz nerovnosti $s < 2r$: 1 bod.

D2 Dôkaz nerovnosti $s \leq 2r - 1$: 2 body.

D3 Dôkaz nerovnosti $r/(2r-1) \leq r/s$: 3 body.

Pri postupe podľa vzorového riešenia 2:

E1 Dôkaz nerovnosti $r > s/2$: 1 bod.

E2 Dôkaz nerovnosti $r \geq (s+1)/2$: 2 body.

E3 Rozdelenie rozboru nerovnosti $r > s/2$ na dva prípady, pre párne a nepárne s: 2 body.

E4 Dôkaz jednej z nerovností $(k+1)/(2k) \leq r/s$ (pre párne s) alebo $k/(2k-1) \leq r/s$ (pre nepárne s): 3 body.

E5 Dôkaz oboch nerovností: 4 body.

Pri postupe podľa vzorového riešenia 3:

F1 Odvodenie nerovností $89r \leq 46s \leq 90r$: 1 bod.

F2 Dolný odhad r (resp. $3r$) pomocou $2r - s$: 1 bod.

F3 Dôkaz $2r - s \geq 1$: 2 body.

Pri postupe podľa vzorového riešenia 4:

G1 Určenie intervalu pre prevrátené číslo s/r: 1 bod.

G2 Určenie intervalu pre číslo $(s-r)/(2r-s)$: 2 body.

G3 Odvodenie odhadov $2r - s \geq 1$ a $s - r \geq 15$: 3 body.

Celkovo potom za neúplné riešenie udeľte

$$a + \max\{b_1, b_2, b_3, b_4, \max\{\max\{d_1, d_2, d_3\}, \max\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, \min\{f_1 + f_2 + f_3, 3\}, \max\{g_1, g_2, g_3\}\}\}$$

bodov.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autor za SK MO: Dominik Martin Rigász
- recenzent: Jozef Rajník
- korektor: Stanislav Krajči