
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(maďarská verzia)

1 Legyenek a és b olyan egymástól különböző valós számok amelyekre az $a^3 + b$ és $b^3 + a$ kifejezések ugyanazt az értéket veszik fel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$-1 \leq ab < \frac{1}{3}.$$

2 Egy folyamatban levő online szavazáson az A és B lehetőségek közül kell választani. Azelőtt hogy Pali szavazott volna, az A lehetőségre adott szavazatok aránya százalékpontban mérve pozitív egész szám volt. Pali szavazata után ez a százalékpont pontosan 1-gyel nőtt. Bizonyítsuk be, hogy a Pali által leadott szavazat a tizenkilencedik volt az A lehetőségre.

3 Egy csapat kerete hét játékosból áll. Egy torna minden fordulójában ezek közül pontosan öt lép pályára és kettő pedig a nézőtéren ül. Bizonyítsuk be, hogy függetlenül a torna fordulóinak (pozitív egész) számától és a pályára küldött ötösök kiválasztásától a torna végén mindig lesz két olyan játékos akik a fordulók számának több mint felében együtt voltak (a pályán vagy a nézőtéren).

4 Adott a BC szakasz. Vegyük az összes olyan hegyesszögű ABC háromszöget, amelyben $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$. Ezekben a háromszögekben az AB és AC oldalakon rendre vegyük fel azokat a D és E pontokat, amelyekre a BC egyenes közös érintője az ACD és ABE háromszögek köré írt köröknek. A D és E pontok merőleges vetületei a BC egyenesre legyenek sorra P és Q . Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan BC egyenesre nem illeszkedő X pont, amelyre a PXQ szög nagysága független az A pont helyzetétől!

Krajské kolo MO kategórie A sa koná v **utorok 14. januára 2025** spravidla od **8:30** do **12:30**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:30 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autorka z SK MO: Jana Kopfová
 - recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajčí
 - preklad: Štefan Gyürki
-