MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1 Nech a a b sú navzájom rôzne reálne čísla také, že výrazy $a^3 + b$ a $a + b^3$ majú rovnakú hodnotu. Dokážte, že platí

$$-1 \leq ab < \frac{1}{3}.$$

(Jana Kopfová, Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Platí

$$0 = \left(a^3 + b\right) - \left(a + b^3\right) = \left(a^3 - b^3\right) - (a - b) = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) + (a - b) = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2 - 1\right),$$

a keďže $a - b \neq 0$,

$$0 = a^2 + ab + b^2 - 1,$$

$$1 = a^2 + ab + b^2.$$

- Keďže $a - b \neq 0$, platí

  $$1 = a^2 + ab + b^2 = \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + 3ab = (a - b)^2 + 3ab > 3ab,$$

  a teda

  $$\frac{1}{3} > ab.$$

- Platí

  $$1 = a^2 + ab + b^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) - ab = (a + b)^2 - ab \geq -ab,$$

  a teda

  $$ab \geq -1.$$

Poznámka:

Z uvedeného riešenia vyplýva, že rovnosť v nerovnosti $-1 \leq ab$ nastane práve vtedy, keď $b = -a$, čiže práve vtedy, keď $(a, b) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$.

Poznámka:

Hodnota ab môže byť ľubovoľne blízko k $\frac{1}{3}$, ale túto hodnotu pre podmienku $a \neq b$ nikdy nedosiahne.

Riešenie 2:

Rovnako ako v riešení 1 odvodíme vzťah $a^2 + ab + b^2 = 1$, ktorý je ekvivalentný

$$b^2 + ab + \left(a^2 - 1\right) = 0,$$

čo možno chápať ako kvadratickú rovnicu s premennou b a parametrom a. Keďže tá má riešenie, jej diskriminant je nezáporný, t. j.

$$a^2 - 4(a^2 - 1) \geq 0,$$

ekvivalentne

$$a^2 + (-4a^2 + 4) \geq 0,$$

$$4 - 3a^2 \geq 0,$$

$$4 \geq 3a^2,$$

$$\frac{4}{3} \geq a^2.$$

Podľa vzorca na riešenie kvadratickej rovnice potom máme

$$b = \frac{-a + z\sqrt{4 - 3a^2}}{2},$$

kde $z \in \{-1, 1\}$. Dvojnerovnosť zo zadania je tak ekvivalentná dvojnerovnosti s jedinou premennou a

$$-1 \leq a \cdot \frac{-a + z\sqrt{4-3a^2}}{2} < \frac{1}{3},$$

ekvivalentne

$$-2 \leq -a^2 + za\sqrt{4-3a^2} < \frac{2}{3},$$

$$a^2 - 2 \leq za\sqrt{4-3a^2} < a^2 + \frac{2}{3}.$$

Tieto dve nerovnosti dokážeme zvlášť:

- Prvá nerovnosť

  $$a^2 - 2 \leq za\sqrt{4-3a^2}$$

  je ekvivalentná

  $$-za\sqrt{4-3a^2} \leq 2 - a^2.$$

  Keďže $a^2 \leq \frac{4}{3} < 2$, pravá strana je nezáporná.

  Rozoberme prípady:

  - Ak $-za < 0$, ľavá strana je záporná, takže nerovnosť platí.
  - Ak $-za \geq 0$, ľavá strana je nezáporná, takže ekvivalentne

    $$|a|\sqrt{4-3a^2} \leq 2 - a^2,$$

    $$a^2\left(4-3a^2\right) \leq 4 - 4a^2 + a^4,$$

    $$4a^2 - 3a^4 \leq 4 - 4a^2 + a^4,$$

    $$0 \leq 4a^4 - 8a^2 + 4,$$

    $$0 \leq a^4 - 2a^2 + 1,$$

    $$0 \leq \left(a^2 - 1\right)^2,$$

    čo platí.

- Pravá strana druhej nerovnosti

  $$za\sqrt{4-3a^2} < a^2 + \frac{2}{3}$$

  je zrejmé kladná.

  Rozoberme prípady:

  - Ak $za \leq 0$, ľavá strana je nekladná, takže nerovnosť platí.
  - Ak $za > 0$, ľavá strana je kladná, takže ekvivalentne

    $$|a|\sqrt{4-3a^2} < a^2 + \frac{2}{3},$$

    $$3|a|\sqrt{4-3a^2} < 3a^2 + 2,$$

    $$9a^2\left(4-3a^2\right) < 9a^4 + 12a^2 + 4,$$

    $$36a^2 - 27a^4 < 9a^4 + 12a^2 + 4,$$

    $$0 < 36a^4 - 24a^2 + 4,$$

    $$0 < 9a^4 - 6a^2 + 1,$$

    $$0 < \left(3a^2 - 1\right)^2.$$

    Rozoberme prípady:

    - Nech $|a| \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$.
      Potom

      $$3a^2 - 1 \neq 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

      takže tvrdenie platí.

- Nech $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
  Potom $z = -1$, takže

$$b = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-1) \cdot \sqrt{4 - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{4 - 3 \cdot \frac{1}{3}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{4-1}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{-2\sqrt{3}}{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

  a teda $b = a$, čo je spor.
  Tento prípad preto nenastáva.
- Nech $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
  Potom $z = 1$, takže

$$b = \frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot \sqrt{4 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{4 - 3 \cdot \frac{1}{3}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{4-1}}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

  a teda $b = a$, čo je spor.
  Tento prípad preto nenastáva.

Riešenie 3:
Nech $s = \frac{1}{2}(a+b)$ a $d = \frac{1}{2}(a-b)$. Potom $a = s + d$ a $b = s - d$ a podľa podmienky zo zadania $d \neq 0$. Preto $a^3 + b = b^3 + a$ znamená

$$(s+d)^3 + (s-d) = (s-d)^3 + (s+d),$$

t. j.

$$\left(s^3 + 3s^2d + 3sd^3 + d^3\right) + (s-d) = \left(s^3 - 3s^2d + 3sd^3 - d^3\right) + (s+d),$$
$$6s^2d + 2d^3 = 2d,$$
$$3s^2 + d^2 = 1.$$

Z toho $d^2 = 1 - 3s^2 \leq 1$ a

$$ab = (s+d)(s-d) = s^2 - d^2 = \frac{1}{3} \cdot 3s^2 - d^2 = \frac{1}{3}\left(1 - d^2\right) - d^2 = \frac{1}{3}\left(1 - d^2 - 3d^2\right) = \frac{1}{3}\left(1 - 4d^2\right).$$

Preto platí:

$$ab = \frac{1}{3}\left(1 - 4d^2\right) \geq \frac{1}{3}\left(1 - 4 \cdot 1^2\right) = \frac{1}{3}(1 - 4 \cdot 1) = \frac{1}{3}(1-4) = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

a

$$ab = \frac{1}{3}\left(1 - 4d^2\right) < \frac{1}{3}\left(1 - 4 \cdot 0^2\right) = \frac{1}{3}(1 - 4 \cdot 0) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Pokyny:
V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie uvedených postupov nasledovne:

A1 Dôkaz nerovnosti $ab < 1/3$: 3 body.
A2 Dôkaz nerovnosti $ab \geq -1$: 3 body.
B Odvodenie rovnosti $a^2 + ab + b^2 = 1$: 2 body.
H1 Dôkaz, že z $a^2 + ab + b^2 = 1$ vyplýva $ab \leq 1/3$: 1 bod.
H2 Dôkaz, že z $a^2 + ab + b^2 = 1$ a $a \neq b$ vyplýva $ab < 1/3$: 2 body.
D Dôkaz, že z $a^2 + ab + b^2 = 1$ vyplýva $ab \geq -1$: 2 body.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte väčší z týchto počtov bodov:

- súčet počtov bodov za A1 a A2,
- súčet počtov bodov za B a za D a maxima z počtov bodov za H1 a H2.

---

2 Prebieha online hlasovanie medzi variantmi A a B. Predtým, ako Pavol hlasoval, bol počet percent hlasov za variant A rovný kladnému celému číslu. Pavlovým hlasom sa toto číslo zväčšilo presne o 1. Dokážte, že Pavlov hlas bol devätnástym hlasom za variant A.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Označme n počet hlasujúcich pred Pavlom a a počet hlasov, ktoré vtedy variant A mal. Keďže počet percent hlasov pre variant A bol kladný, aspoň niekto zaň hlasoval, takže $a, n \geq 1$. Pavlovým hlasom stúpol podiel hlasov pre variant A o 1 percento, čiže

$$\frac{a+1}{n+1} = \frac{a}{n} + \frac{1}{100},$$

ekvivalentne

$$100n(a+1) = 100(n+1)a + n(n+1),$$
$$100na + 100n = 100na + 100a + n^2 + n,$$
$$99n - n^2 = 100a,$$
$$n(99-n) = 100a,$$
$$n(99-n) = 2 \cdot 5^2 \cdot a.$$

Keďže pravá strana je kladná, platí $n \in \{1, \dots, 98\}$. Číslo 5^2 delí súčin čísel n a $99 - n$, a keďže číslo 99 nie je deliteľné 5, nemôžu byť obe deliteľné 5, a preto je jedno z nich násobkom 25.

Rozoberme prípady:

- Nech je jedno z čísel n a $99 - n$ rovné 25.

  Potom je druhé z nich $99 - 25$ čiže 74, takže

  $$n(99-n) = 25 \cdot 74 = 1850,$$

  čo však nie je deliteľné 100.

  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech je jedno z čísel n a $99 - n$ rovné 50.

  Potom je druhé z nich $99 - 50$ čiže 49, takže

  $$n(99-n) = 50 \cdot 49 = 2450,$$

  čo však nie je deliteľné 100.

  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech je jedno z čísel n a $99 - n$ rovné 75.

  Potom je druhé z nich $99 - 75$ čiže 24, takže

  $$100a = n(99-n) = 75 \cdot 24 = 1800,$$
  $$a = 18.$$

Pred Pavlom teda za variant A hlasovalo 18 ľudí, takže jeho hlas bol naozaj devätnásty.

Poznámka:

Hlasovanie teda mohlo mať dve podoby:

- Ak $n = 75$, tak Pavol hlasoval ako 76. a podiel hlasov za variant A stúpol z 18/75 čiže 24 % na 19/76 čiže 25 %.
- Ak $n = 24$, tak Pavol hlasoval ako 25. a podiel hlasov za variant A stúpol z 18/24 čiže 75 % na 19/25 čiže 76 %.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie uvedených postupov nasledovne:

A1 Odvodenie vzťahu alebo obdobnej rovnice (resp. sústavy rovníc), ktorá zachytáva informáciu, že počty percent sa líšia o 1: 1 bod.

A2 Odvodenie vzťahu $n(99-n)=100a$ alebo obdobnej rovnice v súčinovom tvare: 2 body.

A3 Redukcia úlohy na rozbor konečne veľa prípadov (napríklad zdôvodnením, že $n \leq 100$): 1 bod.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte súčet počtov bodov za A1, za A2 a za A3.

---

3 V tíme je sedem hráčov. V každom kole turnaja ich päť hrá a dvaja sedia na tribúne. Dokážte, že nezávisle od (kladného) počtu kôl aj výberu pätíc je možné na konci turnaja nájsť dvoch hráčov, ktorí boli spolu (či už na ihrisku, alebo na tribúne) vo viac ako polovici kôl.

(David Hruška)

Riešenie:

V každom kole sa stretla 1 dvojica hráčov na tribúne a k tomu $\binom{5}{2}$ čiže 10 dvojíc hráčov na ihrisku, takže v každom kole sa stretlo $1+10$ čiže 11 dvojíc hráčov.

Označme k počet kôl, z logiky veci $k>0$. Potom v priebehu celého turnaja sa stretlo celkom $11k$ dvojíc hráčov. Všetkých dvojíc hráčov je dokopy $\binom{7}{2}$ čiže 21, takže tá dvojica, ktorá sa stretla najčastejšie, sa musela stretnúť aspoň v $\frac{11k}{21}$ kolách, čo je aspoň $\frac{1}{2}k$.

Poznámka:

Kľúčovou myšlienkou riešenia je postreh, že v každom kole je spolu 11 dvojíc hráčov, čo je viac ako polovica zo všetkých 21 dvojíc. Samotné riešenie je potom možné sformulovať rôzne, napríklad aj nasledovne:

Označme opäť k počet kôl turnaja. Uvážme všetkých $\binom{7}{2}$ čiže 21 dvojíc hráčov a označme postupne a_1, …, a_{21} počty kôl, v ktorých boli hráči jednotlivých dvojíc spolu. Predpokladajme, že každá dvojica bola spolu najviac v polovici kôl. Potom

$$a_1+\cdots+a_{21} \leq 21 \cdot \frac{1}{2}k = 10{,}5k.$$

Lenže v každom kole je spolu práve $1+\binom{5}{2}$ čiže 11 dvojíc, takže platí

$$11k = a_1+\cdots+a_{21} \leq 10{,}5k < 11k.$$

To je však spor.

Poznámka:

Keby sme počítali len hráčov, ktorí sú spolu na ihrisku, tvrdenie by neplatilo:

Uvažujme turnaj majúci $\binom{7}{2}$ čiže 21 kôl, kde v každom kole je na tribúne iná dvojica hráčov. Potom ľubovoľní dvaja hráči sú spolu na ihrisku práve vtedy, keď je na tribúne jedna z $\binom{5}{2}$ čiže 10 dvojíc zvyšných hráčov. Takže každá dvojica hráčov je spolu na ihrisku v menej ako polovici kôl.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie uvedených postupov nasledovne:

A Akýkoľvek (aj chybný) pokus o počítanie dvojíc hráčov so slovným sprievodom (napr. „Celkovo je v tíme $7 \cdot 6$ čiže 42 dvojíc hráčov.“): 1 bod.

B1 Zdôvodnenie, že celkom je v tíme 21 dvojíc hráčov: 1 bod.

B2 Zdôvodnenie, že v každom kole je spolu 11 dvojíc hráčov: 2 body.

C1 Zdôvodnenie, že v každom kole je spolu aspoň polovica všetkých dvojíc hráčov: 3 body.

C2 Zdôvodnenie, že v každom kole je spolu viac ako polovica všetkých dvojíc hráčov: 4 body.

D1 Vyhlásenie, že keďže v každom kole je spolu viac ako polovica dvojíc, je niektorá dvojica spolu vo viac ako polovici kôl: 1 bod.

D2 Dôkaz, že z C2 vyplýva požadovaný záver, napríklad pomocou sčítania počtov dvojíc cez všetky kolá turnaja (a použitia Dirichletovho princípu) alebo pomocou iného rovnako exaktného argumentu: 2 body.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte väčší z týchto počtov bodov:

- počet bodov za A,
- súčet počtov bodov za B1 a za B2
- počet bodov za C1,
- súčet počtov bodov za C2 a maxima z počtov bodov za D1 a za D2.

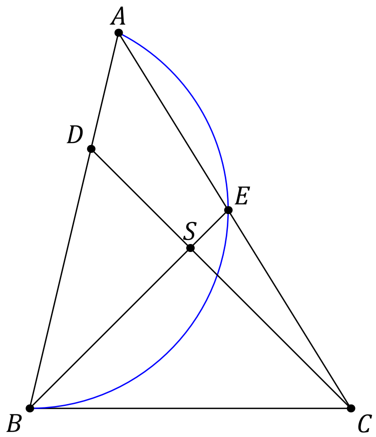
---

4 Nech BC je úsečka. Uvažujeme všetky ostrouhlé trojuholníky ABC také, že $|\sphericalangle BAC| = 45°$. V každom takomto trojuholníku označíme D a E postupne body strán AB a AC také, že priamka BC je spoločnou dotyčnicou kružníc opísaných trojuholníkom ACD a ABE. Päty kolmíc z bodov D a E na priamku BC označíme postupne P a Q. Dokážte, že existuje bod X neležiaci na priamke BC taký, že veľkosť uhla PXQ nezávisí od polohy bodu A.

(Zdeněk Pezlar)

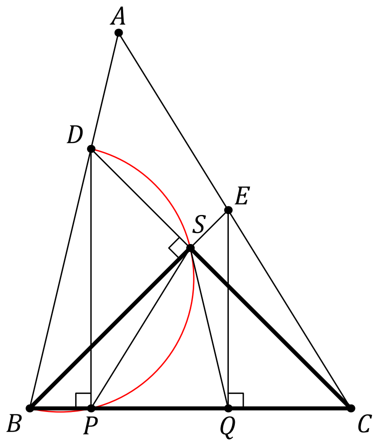
Riešenie:

Vďaka osovej súmernosti podľa priamky BC stačí uvažovať len tie ostrouhlé trojuholníky ABC spĺňajúce podmienku $|\sphericalangle BAC| = 45°$, ktoré ležia v jednej z polrovín určenej priamkou BC. Zamerajme sa na ľubovoľný takýto trojuholník ABC a označme S priesečník úsečiek BE a CD.



Keďže priamka BC je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABE, podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle platí $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle BAE| = 45°$. Podobne je BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ACD, takže platí $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DAC| = 45°$. Celkovo tak dostávame, že SBC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s preponou BC ležiaci v polrovine BCA. Poloha bodu S preto nezávisí od polohy bodu A.

Dokážeme, že bod S je jedným z hľadaných pevných bodov zo zadania úlohy. (Jediným ďalším takým bodom je bod s ním súmerne združený podľa priamky BC).



Keďže oba uhly DPB a DSB sú pravé, ležia body P a S na Tálesovej kružnici s priemerom BD. Štvoruholník $BPSD$ je preto tetivový, takže z vety o obvodových uhloch $|\sphericalangle BSP| = |\sphericalangle BDP| = 90° - |\sphericalangle ABC|$. Analogicky ukážeme, že je tetivový aj štvoruholník $CQSE$ a že platí $|\sphericalangle QSC| = |\sphericalangle QEC| = 90° - |\sphericalangle BCA|$. Potom platí

$$|\sphericalangle PSQ| = |\sphericalangle BSC| - (|\sphericalangle BSP| + |\sphericalangle QSC| = 90° - (90° - |\sphericalangle ABC|) - (90° - |\sphericalangle BCA|)$$

$$= |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCA| - 90° = (180° - |\sphericalangle BAC|) - 90° = (180° - 45°) - 90° = 45°,$$

čo je pevná hodnota, ktorá teda nezávisí od polohy bodu A.

Poznámka:

Je možné dokázať, že bod priesečník S priamok BE a CD splýva so stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle totiž platí $|\sphericalangle BOC| = 90°$ a súčasne $|OB| = |OC|$, takže trojuholník OBC je (rovnako ako trojuholník SBC) rovnoramenný a pravouhlý s preponou BC.

Poznámka:

Podstatnou časťou riešenia je sformulovanie domnienky, že hľadaným pevným bodom bude priesečník priamok BE a CD (prípadne stred kružnice opísanej trojuholníku ABC).

K tomu môže pomôcť, keď si riešiteľ uvedomí, že hľadaný pevný bod musí ležať na osi úsečky BC. Pre body Y mimo tejto osi (a mimo BC) sa totiž veľkosť uhla PYQ zmení, ak namiesto trojuholníka ABC uvážime jeho obraz v osovej súmernosti podľa osi úsečky BC.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

Pre riešiteľov, ktorí pracujú s priesečníkom S úsečiek BE a CD:

- S1 Sformulovanie domnienky, že bod S (resp. jeho osový obraz podľa priamky BC) je hľadaným pevným bodom (bez dôkazu): 2 body.
- S2 Odvodenie aspoň jednej z rovností $|\sphericalangle DCB| = 45°$ a $|\sphericalangle CBE| = 45°$ (stačí vyznačenie na obrázku): 1 bod.
- S3 Dôkaz, že bod S je spoločný pre všetky trojuholníky ABC ležiace v jednej polrovine určenej priamkou BC: 1 bod.
- S4 Dôkaz, že aspoň jeden zo štvoruholníkov $BPSD$ a $CESQ$ je tetivový: 1 bod.
- S5 Dokončenie riešenia za predpokladu, že oba štvoruholníky $BPSD$ a $CESQ$ sú tetivové: 1 bod.

Pre riešiteľov, ktorí pracujú so stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC, resp. s rovnoramenným pravouhlým trojuholníkom OBC s preponou BC:

- O1 Sformulovanie domnienky, že bod O (resp. jeho osový obraz podľa priamky BC) je hľadaným pevným bodom (bez dôkazu): 2 body.
- O2 Dôkaz, že $|\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle CBO| = 45°$ a že bod O je spoločný pre všetky trojuholníky ABC ležiace v jednej polrovine určenej priamkou BC: 0 bodov.
- O3 Odvodenie aspoň jednej z rovností $|\sphericalangle DCB| = 45°$ a $|\sphericalangle CBE| = 45°$ (stačí vyznačenie na obrázku): 1 bod.
- O4 Dôkaz, že bod O splýva s priesečníkom úsečiek BE a CD: 1 bod.
- O5 Dôkaz, že aspoň jeden zo štvoruholníkov $BPOD$ a $CEOQ$ je tetivový: 1 bod.
- O6 Dokončenie riešenia za predpokladu, že oba štvoruholníky $BPOD$ a $CEOQ$ sú tetivové: 1 body.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte maximum zo súčtu počtov bodov za S1, S2, S3, S4, S5 a súčtu počtov bodov za O1, O3, O4, O5, O6.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autorka z SK MO: Jana Kopfová
- recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajči
- preklad: Peter Novotný