66. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2024/2025
domáce kolo kategória A
riešenie úloh
oprava v 4. úlohe

1. Raketa

Riešenie:

a) Na obežnej trajektórii je gravitačná sila Zeme v rovnováhe s odstredivou silou

$$G\frac{M_Z m}{(R_Z+h)^2}=m\frac{v_1^2}{R_Z+h},$$

odkiaľ máme $v_1=\sqrt{G\frac{M_Z}{R_Z+h}}$.

Pre hodnoty $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$, $M_Z = 5{,}97\times10^{24}$ kg, $R_Z = 6\,378$ km

$v_1 = 7{,}78\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ (prvá kozmická rýchlosť). 2 b

b) Ak má raketa opustiť Slnečnú sústavu, musí prekonať gravitačnú príťažlivosť Zeme aj Slnka. Na obežnej trajektórii okolo Zeme musí mať kinetickú energiu dostatočnú na prekonanie potenciálnej energie v gravitačnom poli Zeme a Slnka

$$\frac{1}{2}mv_2^2=G\frac{M_Z m}{R_Z+h}+G\frac{M_S m}{R_{ZS}},$$

odkiaľ máme $v_2=\sqrt{2G\left(\frac{M_Z}{R_Z+h}+\frac{M_S}{R_{ZS}}\right)}$.

Pre $M_S = 1{,}99\times10^{30}$ kg, $R_{ZS} = 1{,}50\times10^8$ km dostávame $v_2 = 43{,}48\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. 2 b

Ak získa raketa túto rýchlosť, bude sa pohybovať voľným pohybom po parabole. 1 b

Na získanie tejto rýchlosti sa využije rýchlosť v_1 obehu rakety okolo Zeme a rýchlosť v_Z Zeme na orbite okolo Slnka, ktorú určíme z rovnice

$$G\frac{M_S M_Z}{R_{ZS}^2}=M_Z\frac{v_3^2}{R_{ZS}},\text{ odkiaľ máme } v_3=\sqrt{G\frac{M_S}{R_{ZS}}}=29{,}75\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Aby sa táto možnosť využila, musí byť rovina trajektórie rakety okolo Zeme totožná s rovinou ekliptiky, tzn. rovinou obehu Zeme okolo Slnka a smer obiehania okolo Zeme musí byť v rovnakom zmysle, v akom obieha Zem okolo Slnka („zo západu na východ“). 1 b

c) Ak využijeme optimálne možnosti, raketa má začiatočnú rýchlosť $v_4 = v_1 + v_3 = 37{,}53\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Pomocou raketového motoru ju treba urýchliť na únikovú rýchlosť v_2.

Motor využíva reaktívnu silu splodín horenia paliva vypúšťaných dýzou veľkou rýchlosťou. Ak dýzu opustia plyny s hmotnosťou $\mathrm{d}m^*$, zmenší sa hmotnosť rakety a zvýši sa rýchlosť rakety. Podľa zákona zachovania hybnosti dostávame

$$mv=\mathrm{d}m^*(v-u)+(m-\mathrm{d}m^*)(v+\mathrm{d}v),\text{ kde } \mathrm{d}m^*=-\,\mathrm{d}m\,.$$

(zmena $\mathrm{d}m$ hmotnosti m rakety je záporná)

Ak zanedbáme veľmi malý člen $\mathrm{d}m^*\mathrm{d}v$, rovnica dostane tvar

$$\mathrm{d}m\,u=-\,m\,\mathrm{d}v,\quad\text{resp.}\quad \frac{\mathrm{d}m}{m}=-\frac{1}{u}\mathrm{d}v$$

a po jej integrácii

$$\int_{m_0}^{m_0-m^*} \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{1}{u}\int_{v_4}^{v_2} \mathrm{d}v \ , \ \text{resp.} \quad \ln\frac{m_0-m^*}{m_0} = -\frac{v_2-v_4}{u} \ .$$

Hmotnosť spotrebovaného paliva

$p = \dfrac{m^*}{m_0} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{v_2-v_4}{u}}$. Pre dané a vypočítané hodnoty $p = \dfrac{m^*}{m_0}$ = 0,733 = 73,3 %. 4 b

2. Kmity valca s dutinou

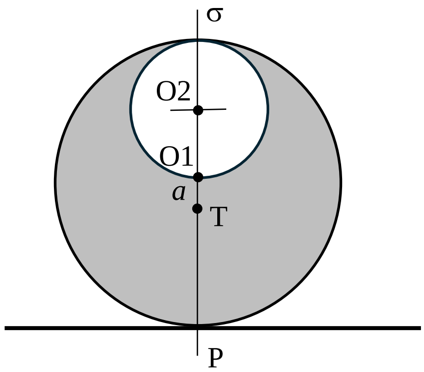
Riešenie:

a) Vzdialenosť a ťažiska od osi O1 určíme podľa vzťahu

$$a = \frac{1}{\rho V_\mathrm{v} - \rho V_\mathrm{d}}\,\rho V_\mathrm{d}\,\frac{R}{2} = \frac{V_\mathrm{d}}{V_\mathrm{v} - V_\mathrm{d}}\,\frac{R}{2} = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}\,\frac{R}{2} = \frac{1}{6}R \ = \ 16{,}7\ \text{mm}. \qquad 2\ \text{b}$$

b) Teleso zaujme stabilnú rovnovážnu polohu, v ktorej je ťažisko najnižšie.

Teleso v rovnovážnej polohe je znázornené na obr. RA–1. Ťažisko je v najnižšej polohe. 1 b



Obr. RA–1

c) Ak sa rovina σ vychýli o uhol φ zo zvislej polohy, potenciálna energia sa zvýši o

$$E_\mathrm{p} = M\,g\,a\left(1 - \cos\varphi\right),$$

kde $M = \rho\left(V_\mathrm{v} - V_\mathrm{d}\right) = \dfrac{3}{4}\rho V_\mathrm{v}$ je hmotnosť telesa.

Pre malý uhol použijeme náhradu $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{1}{2}\varphi^2$

$$E_\mathrm{p} \approx \frac{1}{2}M\,g\,a\,\varphi^2 = \frac{1}{2}D\,\varphi^2,$$

kde $D = M\,g\,a = \dfrac{3}{4}\rho V_\mathrm{v}\,g\,\dfrac{R}{6} = \dfrac{3}{24}\rho V_\mathrm{v}\,g\,R$. 2 b

Určíme kinetickú energiu valivého pohybu telesa. Pohyb považujeme za otáčanie okolo okamžitej osi, ktorou je dotyková priamka P, obr. RA–1.

$E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}J\,\dot{\varphi}^2$, kde $\dot{\varphi}$ je uhlová rýchlosť otáčania.

Zostáva určiť moment zotrvačnosti J vzhľadom na os P.

$$J = \left(\frac{1}{2}\rho V_\mathrm{v}\,R^2 + \rho V_\mathrm{v}\,R^2\right) - \left(\frac{1}{2}\rho V_\mathrm{d}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \rho V_\mathrm{d}\left(\frac{3R}{2}\right)^2\right) = \frac{29}{32}\rho V_\mathrm{v}\,R^2 . \qquad 2\ \text{b}$$

Uhlová frekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\rho V_\mathrm{v}\,g\,\frac{R}{6}}{\frac{29}{32}\rho V_\mathrm{v}\,R^2}} = \sqrt{\frac{4}{29}\frac{g}{R}} \ , \qquad 2\ \text{b}$$

a perióda kmitov

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{29 \frac{R}{g}} \,.$$

Pre dané hodnoty ω = 3,68 s^{-1} a T = 1,71 s. 1 b

3. Vznik oblakov

Riešenie:

a) Relatívna vlhkosť je daná pomerom parciálneho tlaku p_p vodnej pary a tlaku nasýtenej pary pri danej teplote. Nad hladinou vodnej plochy je parciálny tlak pary

$$p_{\mathrm{p}0} = \frac{N_\mathrm{v}}{V} k_\mathrm{B} T_0 = \eta_0 \; p_\mathrm{n}\left(T_0\right).$$ Pre dané hodnoty $p_{\mathrm{p}0}$ = 1,87 kPa. 1 b

Parciálny tlak vzduchu

$$p_{\mathrm{v}0} = \frac{N_0 k_\mathrm{B}}{V} T_0 = p_0 - p_{\mathrm{p}0} = p_0 - \eta \, p_\mathrm{n}\left(t_0\right).$$ Pre dané hodnoty $p_{\mathrm{v}0}$ = 98,1 kPa. 1 b

Celkový tlak vlhkého vzduchu $p_0 = p_{\mathrm{v}0} + p_{\mathrm{p}0}$ a hľadaný pomer je

$$\frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{v}} = \frac{\eta_0 \; p_\mathrm{n}\left(T_0\right)}{p_0 - \eta_0 \; p_\mathrm{n}\left(T_0\right)}.$$ Pre dané hodnoty $N_\mathrm{p}/N_\mathrm{v}$ = 1,9×10^{-2} = 1,9 %. 1 b

b) Tlak vzduchu s výškou klesá

$$\mathrm{d}p = -\rho g \, \mathrm{d}h \,.$$

Ak je dej adiabatický platí $\mathrm{d}U = \delta W$, resp. $C_V \, \mathrm{d}T = -p \, \mathrm{d}V$.

Pre plyn platí stavová rovnica $pV = n R T$ a v diferenčnej forme

$$p \mathrm{d}V + V \mathrm{d}p = n R \, \mathrm{d}T \,.$$

Po dosadení a úprave

$$V \mathrm{d}p = \left(C_V + n R\right) \mathrm{d}T \quad \text{a ďalej} \quad \left(C_V + n R\right) \mathrm{d}T = -\rho g \, \mathrm{d}h \, V = -m g \, \mathrm{d}h \,.$$

Ak vyjadríme $C_V + n R = \frac{s}{2} n R + n R = \left(\frac{s}{2} + 1\right) n R = \left(\frac{s}{2} + 1\right) \frac{m}{M_\mathrm{m}} R$, dostaneme

$$\left(\frac{s}{2} + 1\right) \frac{m}{M_\mathrm{m}} R \, \mathrm{d}T = -m g \, \mathrm{d}h \text{, a teda } \mathrm{d}T = -\frac{2}{s+2} \frac{M_\mathrm{m} g}{R} \, \mathrm{d}h \,.$$

Pre dané hodnoty $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = -\frac{2}{s+2} \frac{M_\mathrm{m} g}{R} = -$ 9,8 °C/km. 2 b

Teplota vzduchu klesá s výškou rovnomerne

$$t = t_0 - \frac{2}{s+2} \frac{M_\mathrm{m} g}{R} \left(h - h_0\right). \qquad (1)$$ 1 b

c) Parciálny tlak vodnej pary určíme pomocou stavovej rovnice vodnej pary

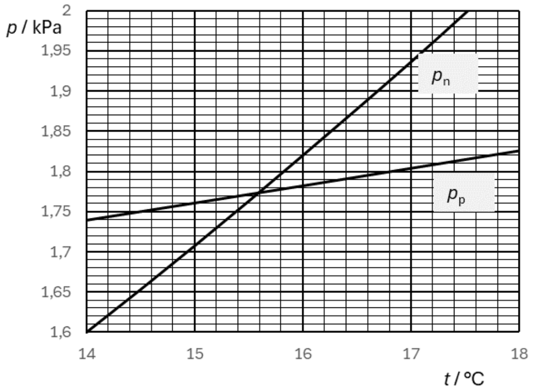
$$\frac{p_\mathrm{p} V}{T} = \frac{m}{M_\mathrm{mp}} R = \frac{p_{\mathrm{p}0} V_0}{T_0}, \text{ odkiaľ } p_\mathrm{p} = p_{\mathrm{p}0} \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V},$$

a pomeru V/V_0 vzduchu (pre adiabatický dej)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa = \frac{n R T}{V} \Big/ \frac{n R T_0}{V_0}, \text{ odkiaľ } \frac{V_0}{V} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}.$$

Tlak pary je

$$p_\mathrm{p} = p_{\mathrm{p}0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (2)$$



Zo vzťahov (1) a (2) dostaneme závislosť parciálneho tlaku pary od výšky

$$p_\mathrm{p} = p_{\mathrm{p}0}\left(1-\frac{2}{s+2}\frac{M_\mathrm{m}\,g}{RT_0}(h-h_0)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

2 b

Na určenie výšky kondenzácie použijeme teplotnú závislosť $p_\mathrm{n}(t)$ – tabuľka v zadaní, a vzťah (2). Zostrojíme grafy závislosti tlaku nasýtenej pary p_n a tlaku pary vo vzduchu p_p (obrázok) a vidíme,
že grafy sa pretínajú pri teplote t_m = 15,6 °C (presnejšie 15,591 °C). Tejto teplote zodpovedá výška

$$h_\mathrm{m} = \frac{R}{M_\mathrm{m}\,g}\frac{s+2}{2}(t_0-t_\mathrm{m}).$$

Pre dané hodnoty h_m = 450 m. 2 b

4. Obvod s LED

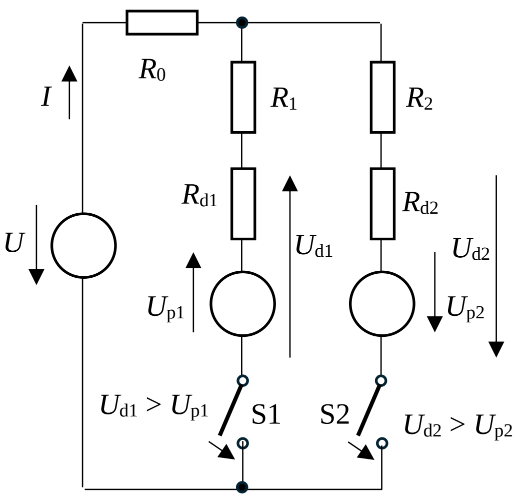
Riešenie:

a) S použitím náhradných priamok v charakteristikách určíme pre diódu D1:

$U_{\mathrm{p}1}$ = 1,55 V a $R_{\mathrm{d}1} = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = \dfrac{0{,}159\ \mathrm{V}}{30\ \mathrm{mA}} = 5{,}31\,\Omega$, 1 b

pre diódu D2:

$U_{\mathrm{p}2}$ = 1,81 V a $R_{\mathrm{d}2} = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = \dfrac{0{,}444\ \mathrm{V}}{30\ \mathrm{mA}} = 14{,}80\,\Omega$. 1 b



b) V schéme obvodu sú diódy nahradené sériou dynamického odporu R_d, napäťového zdroja U_p a spínača S. 2 b

c) Ak je napätie zdroja $-U_{\mathrm{p}1} < U < U_{\mathrm{p}2}$, sú obe diódy zatvorené (S1 a S2 rozopnuté).

Ak je $U < -U_{\mathrm{p}1}$, začne diódou D1 prechádzať prúd

$$I = \frac{U+U_{\mathrm{p}1}}{R_0+R_1+R_{\mathrm{d}1}},$$

Pre $U_0 = -24$ V $< -U_{\mathrm{p}1}$ a prúd $-I_0$ (opačný smer)

máme $R_1 = \dfrac{U_0+U_{\mathrm{p}1}}{-I_0} - R_0 - R_{\mathrm{d}1}$.

Pre dané hodnoty R_1 = 617 Ω. 2b

Podobne, ak je $U > U_{\mathrm{p}2}$, prechádza prúd diódou D2 a dostávame

$$I = \frac{U - U_{\mathrm{p2}}}{R_0 + R_2 + R_{\mathrm{d2}}},$$

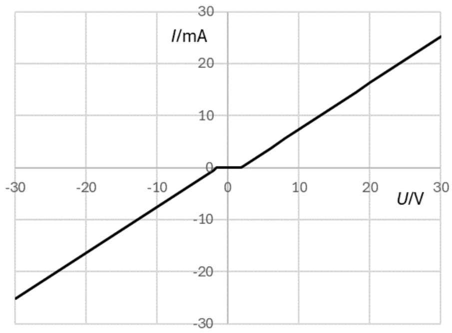
a teda pre U_0 = 24 V a I_0

máme $R_2 = \dfrac{U_0 - U_{\mathrm{p2}}}{I_0} - R_0 - R_{\mathrm{d2}}$.

Pre dané hodnoty R_2 = 595 Ω. 2 b

Obvod možno použiť na indikáciu polarity napätia zdroja. Pri kladnom napätí svieti žltá dióda D2, pri zápornom červená D1.

d) Graf závislosti prúdu I zdroja od napätia U zdroja. 2 b



5. Dve šošovky

Riešenie:

a) Šošovka S1 vytvára obraz vo vzdialenosti b_1 od šošovky, pričom platí zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} = D_1 .$$

Obraz vytvorený šošovkou S1 je predmetom pre šošovku S2, pričom predmetová vzdialenosť je $L - b_1$ a platí

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{L - b_1} = \frac{1}{f_2} = D_2 .$$

Z oboch rovníc vylúčime b_1 a dostaneme

$$a_2 = \frac{L\left(D_1 a_1 - 1\right) - a_1}{1 + LD_2\left(D_1 a_1 - 1\right) - \left(D_2 + D_1\right) a_1} \qquad (1)$$ 1 b

b) Do rovnice (1) dosadíme podmienky prvého zobrazenia $a_1 = L$ a $a_2 = 2\,L$, a potom podmienky druhého zobrazenie $D_1 \rightarrow D_2$, $D_2 \rightarrow D_1$, $a_1 = L$, $a_2 = 3/2\ L$

$$2L = \frac{L\left(D_1 L - 1\right) - L}{1 + LD_2\left(D_1 L - 1\right) - \left(D_2 + D_1\right) L} \qquad (2)$$

a $$\frac{3}{2} L = \frac{L\left(D_2 L - 1\right) - L}{1 + LD_1\left(D_2 L - 1\right) - \left(D_2 + D_1\right) L} . \qquad (3)$$

Rovnice (2) a (3) upravíme napr. na tvar

$$4-4LD_2-D_1L\left(3-2D_2L\right) \;=\; 0$$

$$7-5\,LD_2-3LD_1\left(2-D_2\,L\right)= \;0\,.$$

Z oboch rovníc vyjadríme D_1

$$D_1 \;=\; \frac{4-4L\,D_2}{L\left(3-2D_2L\right)}=\frac{7-5\,LD_2}{3L\left(2-D_2\,L\right)}\;\;, \qquad (4)$$

odkiaľ vyjadríme D_2 v tvare kvadratickej rovnice

$$D_2^2-2\frac{7}{4}\frac{1}{L}D_2+\frac{3}{2}\frac{1}{L^2}=0\,,$$

ktorá má riešenie

$$D_2=\frac{7}{4L}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{4L}\right)^2-\frac{3}{2L^2}}=\frac{7}{4L}\left(1\pm\frac{5}{7}\right)=\;\frac{3}{L}\;\;,\;\;\frac{1}{2L}\,.$$

Dosadením do (4) určíme

$$D_1 \;=\; \frac{8}{3L}\,,\frac{1}{L}\,.$$

Dostávame dve dvojice výsledkov

i) $D_1 = \dfrac{8}{3L}$ a $D_2 = \dfrac{3}{L}$ 1 b

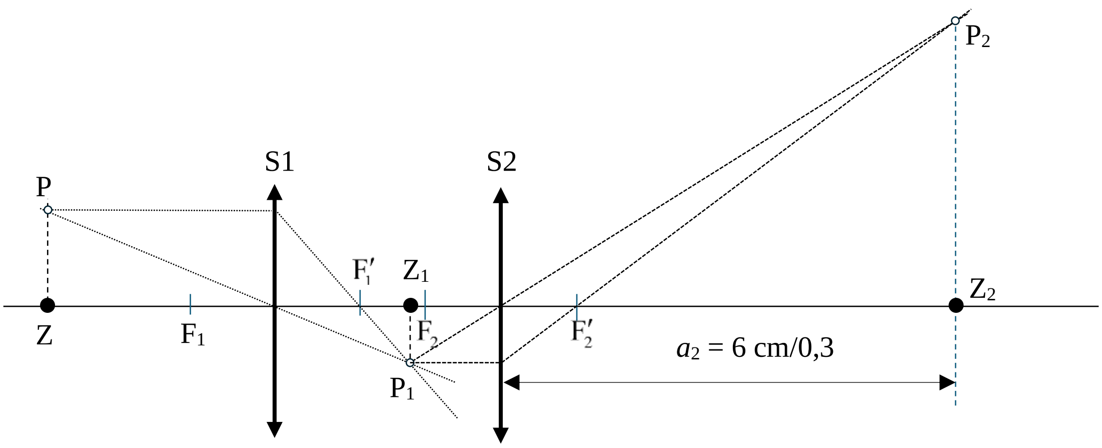
ii) $D_1 = \dfrac{1}{L}$ a $D_2 = \dfrac{1}{2L}$ 1 b

podľa toho, či i) $D_1 < D_2$ alebo ii) $D_1 > D_2$.

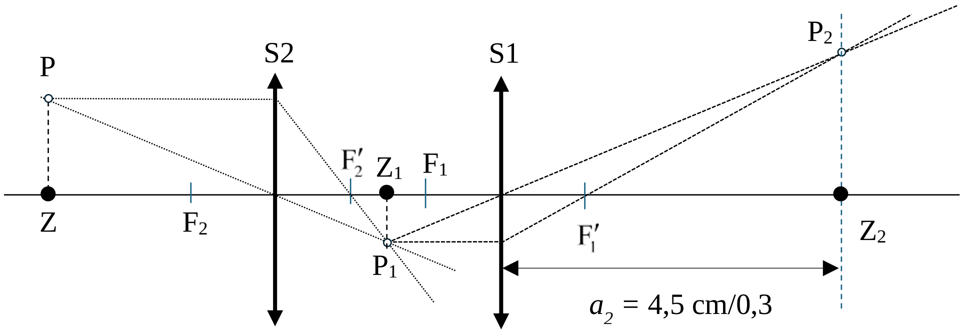
d) Pre väčšiu presnosť je vhodné použiť hárok A4 na šírku (rozmer pribl. 30 cm).

i) Vhodná je mierka 1 : 2, L = 10 cm, f_1 = 3,75 cm, f_2 = 3,33 cm. Obrázky 2×1,5 b

Vo vzorovej ukážke je konštrukcia na šírku s rozmerom rámika 15 cm, a zvolená je mierka 3 : 10 .

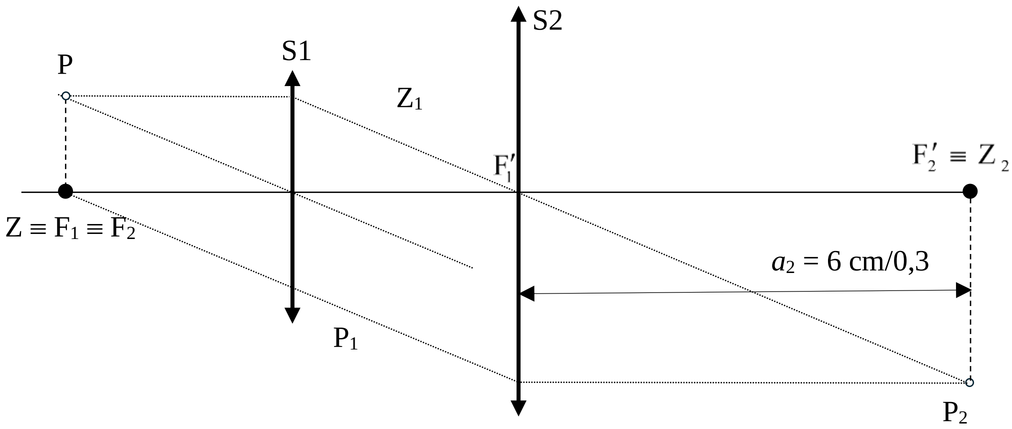


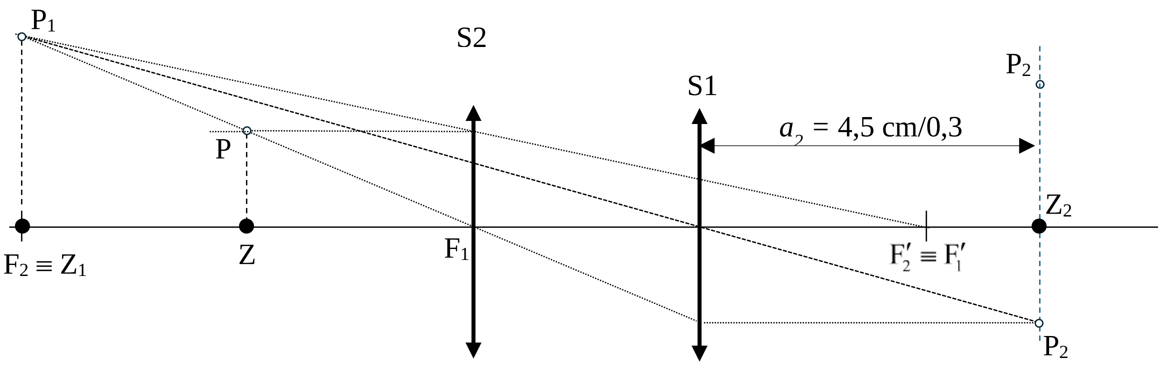
Aby sa mohli použiť významné lúče, treba zobrazovať bod P ležiaci nad zdrojom Z mimo optickú os. Prvou šošovkou získame obraz P_1, ktorý potom zobrazíme šošovkou S2 – obraz P_2. Obraz zdroja Z je na optickej osi v príslušnej vzdialenosti.



ii) Rovnako postupujeme v druhom prípade: L = 10 cm, f_1 = 10 cm, f_2 = 20 cm.

Obrázky 2×1,5 b





V tomto prípade je obraz Z_1, resp. P_1, zdanlivý.

Výsledky získané grafickou konštrukciou zodpovedajú hodnotám získaným výpočtom.

1 b

6. Rádioaktívna premena

Riešenie:

a) Rovnice premien

$$^{211}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow \, ^{211}_{83}\mathrm{Bi} + \beta^- \left(+\bar{\nu}_\mathrm{e}\right)$$

$$^{211}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow \, ^{207}_{81}\mathrm{Tl} + \, ^{4}_{2}\alpha$$

$$^{207}_{81}\mathrm{Tl} \rightarrow \, ^{207}_{82}\mathrm{Pb} + \beta^- \left(+\bar{\nu}_\mathrm{e}\right)$$

Prvá je β–premena, druhá je α–premena a tretia β–premena. 2 b

b) Na začiatku vzorka vykazuje iba β–aktivitu izotopu ^{211}Pb.

Počet atómov nuklidu ^{211}Pb vo vzorke na začiatku (t = 0)

$$N_0 = \frac{m}{M_\mathrm{m}} N_\mathrm{A} .$$

Začiatočná aktivita vzorky

$$A_{1\beta0} = \frac{\ln 2}{T_1} N_0 = \frac{\ln 2}{T_1}\frac{m}{M_\mathrm{m}} N_\mathrm{A}$$. Pre dané hodnoty $A_{1\beta0} = 9{,}13\times10^{17}$ Bq. 2 b

c) Vzorka ^{211}Pb postupne zaniká. Počet aktívnych atómov je

$$N_1 = N_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}$$

Premenou izotopu ^{211}Pb postupne vzniká α–aktívny izotop ^{211}Bi, ale ten zároveň zaniká premenou na ^{207}Tl. Časová zmena počtu N_2 atómov ^{211}Bi je

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = A_1 - A_2 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 - \frac{\ln 2}{T_2} N_2 = \frac{\ln 2}{T_1} N_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} - \frac{\ln 2}{T_2} N_2$$

Dostávame jednoduchú nehomogénnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\ln 2}{T_2} N_2 = \frac{\ln 2}{T_1} N_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} . \qquad (1)$$

Riešenie rovnice pozostáva z riešenia homogénnej rovnice a partikulárneho riešenia.

Riešime homogénnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\ln 2}{T_2} N_2 = 0$$, resp. $$\frac{\mathrm{d}N_2}{N_2} = -\frac{\ln 2}{T_2}\mathrm{d}t$$ a po integrácii $$\ln N_{2\mathrm{h}} = -\frac{\ln 2}{T_2} t + C .$$

Rovnicu dáme do exponentu $\mathrm{e}^{\ln N_{2\mathrm{h}}} = N_{2\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_2}t + C} = K\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_2}t}$. (2)

Partikulárne riešenie je funkcia, ktorá spĺňa pravú stranu rovnice. Ak má byť na pravej strane exponenciála, musia byť na ľavej strane oba členy tiež exponenciálne s rovnakým exponentom

$$N_{2\mathrm{p}} = B\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} .$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$-B\frac{\ln 2}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} + \frac{\ln 2}{T_2} B\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} = \frac{\ln 2}{T_1} N_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}$$, odtiaľ $$B = \frac{T_2}{T_1 - T_2} N_0 .$$

Úplné riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou má tvar

$$N_2 = K\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_2}t} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t}.$$

Konštantu K určíme zo začiatočných podmienok: pre $t = 0$ je $N_2 = 0$, a teda $K = -\frac{T_2}{T_1 - T_2} N_0$.

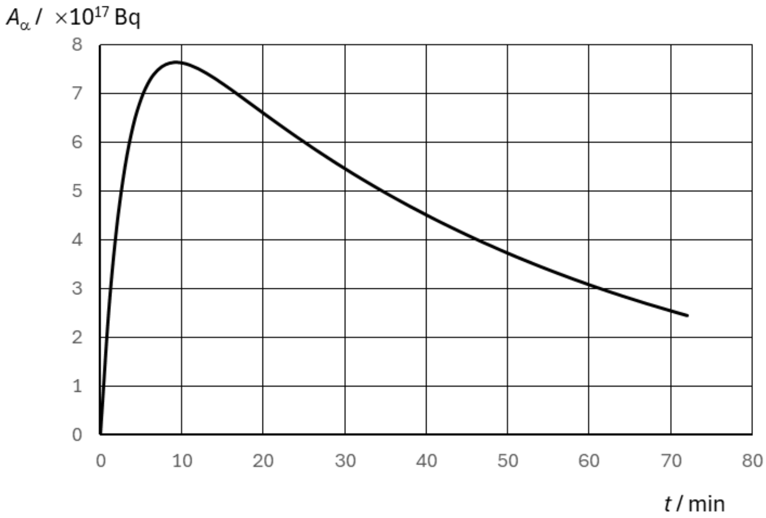
Výsledné riešenie je

$$N_2(t) = \frac{T_2}{T_1 - T_2} N_0 \left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_2}t} \right). \qquad (3)$$

α–aktivita sesterského nuklidu ^{211}Bi je

$$A_{2\alpha} = \frac{\ln 2}{T_2} N_2 = N_0 \frac{\ln 2}{T_1 - T_2} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_1}t} - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_2}t} \right). \qquad (4)$$ 4 b

d) Graf znázorňuje funkciu (4). 2 b



7. Overenie Stefanovho-Boltzmannovho zákona – *experimentálna úloha*

Riešenie:

a) Vyplnenie nameraných hodnôt napätia a prúdu do tabuľky (minimálne 20 hodnôt) 1 b

Údaj o teplote t_0 miestnosti. 0,5 b
Formálne správna tabuľka (hlavičky riadkov a stĺpcov, označenie veličín a jednotiek, správne zaokrúhlenie hodnôt). 1 b
Doplnenie stĺpcov pre odpor $R = U/I$ a príkon $P = UI$. 1 b

b) Formálne správny graf (označenie veličín, jednotiek a stupníc na osiach, využitie plochy grafu, označenie vynesených bodov grafu, nakreslenie najpravdepodobnejšej krivky). 1 b

Určenie odporu vlákna R_0 pri nulovom napätí. 0,5 b

c) Doplnenie hodnôt teploty pre jednotlivé napätia podľa zadaného vzťahu pre teplotnú závislosť odporu $T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) + T_0$, kde $T_0 = t_0 + 273{,}15$ K. 1 b

d) Pre overenie priamej úmernosti je vhodné na os nezávisle premennej vynášať veličinu $x = T^4$ a na os závisle premennej $y = P$.

Druhá možnosť je využiť logaritmus vzťahu

$P_e = \sigma S\left(T^4 - T_0^4\right)$, a pre $T_0^4 \ll T^4$ $P_e = \sigma S T^4$: (i)

$$\log\left(\frac{P_e}{1\text{W}}\right) = 4\log\left(\frac{T}{1\text{K}}\right) + \log\left(\frac{\sigma S T_0^4}{1\text{W}}\right), \text{ resp. } \log\{P_e\} = 4\log\{T\} + \log\{\sigma S T_0^4\} \qquad \text{(ii)}$$

Pozn.: Fyzikálny zmysel má iba logaritmus bezrozmernej hodnoty, napr. $\frac{P_e}{1\text{W}} = \{P_e\}$

i) Ak zvolíme vzťah (i), na os x vynesieme T^4 a na os y P.

Vhodné je doplniť do tabuľky stĺpec T^4.

ii) Ak zvolíme vzťah (ii), vynesieme na os x hodnotu log $\{T\}$ a na os y hodnotu log $\{P\}$. Vhodné je do tabuľky doplniť hodnoty logaritmov veličín.

Graf s lineárnou časťou 1 b

Z grafu určíme hodnotu U_L = ... V od ktorej je splnená úmernosť $P \sim T^4$. 0,5 b

Overenie priamej úmernosti: v prípade (i) časť $U > U_L$ možno nahradiť priamkou, v prípade (ii) je smernica náhrady priamkou rovná 4.

Opis stavu vlákna – tmavé pre nízke hodnoty napätia $U < U_L$ a svieti pri vysokých teplotách od červenej až po svetlo žltú. 0,5 b

Energia uvoľnená vo vlákne pri prechádzaní prúdu sa odvádza do okolia jednak vedením tepla, ktorého výkon je priamoúmerný rozdielu teplôt $(T - T_0)$, a vyžarovaním priamoúmerným $(T^4 - T_0^4)$. Pri nízkych teplotách prevažuje odvod tepla vedením (povrch je šedý), pri vysokých teplotách prevažuje odvod tepla žiarením (povrch viditeľne žiari). 1 b

e) Obsah žiariaceho povrchu určíme z údajov zistených z grafu.

i) Ak zvolíme vzťah (i), je smernica náhradnej priamky $k = \sigma S$. Z grafu určíme smernicu $k = \Delta y / \Delta x$ a potom obsah $S = k / \sigma$.

ii) Ak zvolíme vzťah (ii), náhradná priamka pretína os y v hodnote $y_0 = \log\{\sigma S T_0^4\}$, z ktorej určíme obsah $S = \frac{10^{y_0}}{\sigma T_0^4}$. 1 b

Fyzikálna olympiáda – 66. ročník – úlohy okresného kola kat. A
Návrh a úprava úloh: Ľubomír Konrád (1, 2, 5) , Ivo Čáp (3, 4, 6, 7)
Recenzia úloh: Ľubomír Mucha, Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024