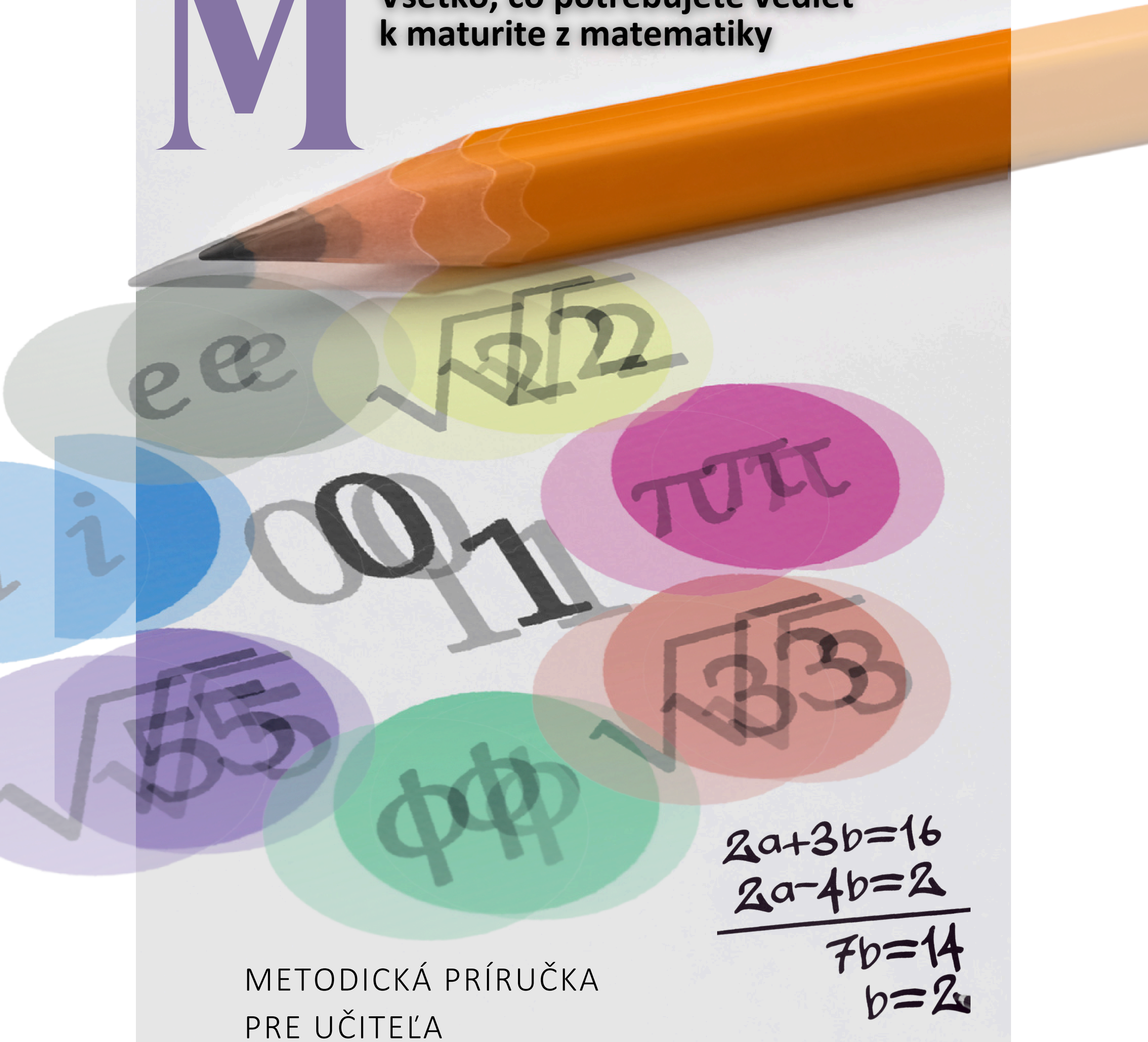
Maturita z matematiky

Všetko, čo potrebujete vedieť k maturite z matematiky



METODICKÁ PRÍRUČKA
PRE UČITEĽA

NÁRODNÝ INŠTITÚT VZDELÁVANIA A MLÁDEŽE
2024

Maturita z matematiky – všetko, čo potrebujete vedieť k maturite z matematiky

Editor:

PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD.

Národný inštitút vzdelávania a mládeže

Autorský kolektív:

PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD.

Mgr. Pavol Kelecsényi

Mgr. Zuzana Červeňanská, PhD.

Recenzent:

RNDr. Miroslav Repovský

RNDr. Mária Kredátusová, PhD.

Jazyková úprava:

Mgr. Pavol Kelecsényi

Grafická úprava:

PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD. ; obálka: Mgr. Eva Vašková

Prvé vydanie, 2024

Počet strán: 90

ISBN 978-80-565-1550-1

Obsah

ÚVOD ... 6
1. LEGISLATÍVA ... 7
2. PRÍKLADY MATURITNÝCH ÚLOH ... 21
2.1 Základy matematiky: Logika a množiny ... 21
2.1.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 21
2.1.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 21
2.1.3 Úlohy na postup riešenia ... 22
2.2 Základy matematiky: Čísla, premenné a výrazy ... 24
2.2.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 24
2.2.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 24
2.2.3 Úlohy na postup riešenia ... 25
2.3 Základy matematiky: Teória čísel ... 27
2.3.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 27
2.3.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 27
2.3.3 Úlohy na postup riešenia ... 28
2.4 Základy matematiky: Rovnice, nerovnice a ich sústavy ... 29
2.4.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 29
2.4.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 29
2.4.3 Úlohy na postup riešenia ... 30
2.5 Funkcie: Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti ... 31
2.5.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 31
2.5.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 31
2.5.3 Úlohy na postup riešenia ... 36
2.6 Funkcie: Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť ... 38
2.6.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 38
2.6.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 38
2.6.3 Úlohy na postup riešenia ... 40
2.7 Funkcie: Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia ... 43
2.7.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 43
2.7.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 43
2.7.3 Úlohy na postup riešenia ... 44
2.8 Funkcie: Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť ... 46
2.8.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 46
2.8.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 46
2.8.3 Úlohy na postup riešenia ... 47

2.9 Funkcie: Goniometrické funkcie 50
2.9.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 50
2.9.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 50
2.9.3 Úlohy na postup riešenia 51
2.10 Planimetria: Základné rovinné útvary 53
2.10.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 53
2.10.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 54
2.10.3 Úlohy na postup riešenia 54
2.11 Planimetria: Analytická geometria v rovine 56
2.11.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 56
2.11.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 56
2.11.3 Úlohy na postup riešenia 57
2.12 Planimetria: Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie 59
2.12.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 59
2.12.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 59
2.12.3 Úlohy na postup riešenia 60
2.13 Planimetria: Zhodné a podobné zobrazenia 61
2.13.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 61
2.13.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 61
2.13.3 Úlohy na postup riešenia 62
2.14 Planimetria: Konštrukčné úlohy 64
2.14.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 64
2.14.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 64
2.14.3 Úlohy na postup riešenia 65
2.15 Stereometria: Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny 66
2.15.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 66
2.15.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 66
2.15.3 Úlohy na postup riešenia 67
2.16 Stereometria: Súradnicová sústava v priestore 68
2.16.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 68
2.16.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 68
2.16.3 Úlohy na postup riešenia 69
2.17 Stereometria: Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy 71
2.17.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi 71
2.17.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie 71
2.17.3 Úlohy na postup riešenia 72

2.18 Stereometria: Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy ... 75
2.18.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 75
2.18.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 75
2.18.3 Úlohy na postup riešenia ... 76
2.19 Stereometria: Telesá ... 77
2.19.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 77
2.19.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 77
2.19.3 Úlohy na postup riešenia ... 78
2.20 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika: Kombinatorika, pravdepodobnosť ... 79
2.20.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 79
2.20.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 79
2.20.3 Úlohy na postup riešenia ... 80
2.21 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika: Štatistika ... 83
2.21.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi ... 83
2.21.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie ... 83
2.21.3 Úlohy na postup riešenia ... 87
LITERATÚRA ... 90

ÚVOD

Predmet matematika patrí do vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami. Spolu s informatikou sa podieľa na rozvíjaní matematického myslenia, ktoré je potrebné pri riešení rôznych problémov v každodenných situáciách, a spôsobilosti formulovať problém s využitím stratégie algoritmického prístupu pri jeho riešení. Žiaci prostredníctvom matematického vzdelávania prehlbujú svoje abstraktné, analytické, systémové myslenie a logické usudzovanie. Rovnako dôležité je, aby žiaci zrozumiteľne a vecne argumentovali. Matematika vytvára možnosti na tie kognitívne činnosti žiakov, ktoré operujú s pojmami, akými sú hľadanie, pátranie, skúmanie, objavovanie, lebo v nich spočíva základný predpoklad poznávania a porozumenia. Zvládnutím vedomostí a zručností, ktoré primárne rozvíja predmet matematika, sa zvyšuje pravdepodobnosť uplatnenia žiakov v širokej škále odborov ľudskej činnosti.

Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky vymedzujú vedomosti a zručnosti, ktoré majú žiaci počas štúdia nadobudnúť a preukázať na maturitnej skúške. Nevychádzajú iba z obsahového a výkonového štandardu stanoveného štátnym vzdelávacím programom, ale sú rozšírené o vybrané témy a zručnosti, ktoré sú východiskom pre ďalšie štúdium matematiky. Štandardy v štátnom vzdelávacom programe určujú iba všeobecný základ pre všetkých žiakov. Ich splnenie nie je postačujúcou prípravou na maturitnú skúšku, je pre ňu len východiskom. Nadobudnutie vedomostí a zručností vymedzených v cieľových požiadavkách vyžaduje špeciálne zameranú prípravu v rámci vhodne koncipovaných rozširujúcich hodín matematiky a voliteľných predmetov obsahovo a tematicky blízkych matematike, ktoré škola ponúkne v školských vzdelávacích programoch hlavne v posledných dvoch ročníkoch.

Táto publikácia môže byť pre učiteľov pripravujúcich maturantov na maturitnú skúšku z matematiky pomôckou pri oboznamovaní sa s časťami maturitnej skúšky z matematiky a pri procese prípravy maturitných zadaní pre ústnu formu internej časti maturitnej skúšky z matematiky. Sumarizuje všetky podklady potrebné k maturitnej skúške z matematiky, začínajúc legislatívou, cez podrobnosti o spôsobe konania maturitnej skúšky, cieľové požiadavky a ukážky úloh maturitných zadaní z matematiky.

1. LEGISLATÍVA

Ukončovanie štúdia v stredných školách upravujú dokumenty Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVaŠ SR) a dokumenty vydané Štátnym pedagogickým ústavom a Národným ústavom certifikovaných meraní vzdelávania (v súčasnosti obe ako Národný inštitút vzdelávania a mládeže NIVaM) a schválené MŠVVaŠ SR. Aktuálne, pre školský rok 2024/2025, sú k maturitnej skúške platné tieto dokumenty:

1. Zákon č. 245/2008 Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky z 22. mája 2008 o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov;
2. Vyhláška č. 224/2022 Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky z 15. júna 2022 o strednej škole;
3. Usmernenie k zverejňovaniu maturitných zadaní a maturitných tém č. 2022/11415:34-A2220 MŠVVaŠ SR zo 7. decembra 2022 s ukážkami vzorov maturitného zadania;
4. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky platné od školského roka 2018/2019;
5. Špecifikácia testu z matematiky pre externú časť maturitnej skúšky – aktualizované a zverejnené pre každý školský rok samostatne.

Maturitná skúška z matematiky

(1, § 74) Cieľom maturitnej skúšky je overenie vedomostí a zručností žiakov v rozsahu učiva určeného katalógom cieľových požiadaviek a overenie toho, ako sú žiaci pripravení používať získané kompetencie v ďalšom štúdiu alebo pri výkone povolaní a odborných činností, na ktoré sa pripravujú.

Žiak môže konať maturitnú skúšku z matematiky, len ak bol tento vyučovací predmet uvedený v učebnom pláne školy a žiak sa v tomto predmete vzdelával.

Žiak môže konať maturitnú skúšku z matematiky ako voliteľný predmet (vykoná externú časť aj ústnu formu internej časti) alebo ako dobrovoľný predmet. Vykonaním dobrovoľnej maturitnej skúšky sa rozumie aj absolvovanie len externej časti maturitnej skúšky alebo len internej časti maturitnej skúšky.

Žiak môže vykonať internú časť maturitnej skúšky, ak úspešne ukončil príslušný ročník, v ktorom sa ukončil rámcový učebný plán príslušného vyučovacieho predmetu v školskom vzdelávacom programe a vykonal externú časť maturitnej skúšky (bez ohľadu na výsledok tejto časti skúšky).

Ak žiakovi so zdravotným znevýhodnením neumožňuje jeho zdravotné znevýhodnenie vykonať maturitnú skúšku bez úprav, maturitná skúška sa vykonáva podľa upravených podmienok (podľa 2, § 16).

(2, § 11) Maturitná skúška z matematiky pozostáva z externej časti a ústnej formy internej časti.

(2, § 12) Žiak gymnázia a strednej športovej školy v študijnom odbore športové gymnázium vykoná maturitnú skúšku z matematiky ako voliteľný predmet alebo ako dobrovoľný predmet. Jedným z voliteľných predmetov je vyučovací predmet, v ktorom mal žiak súčet týždenných hodinových dotácií počas štúdia v gymnáziu najmenej šesť vyučovacích hodín. V súčte týždenných hodinových dotácií sa zohľadňuje aj hodinová dotácia zo seminára alebo z cvičení rovnakého zamerania.

(2, § 13) Žiak strednej odbornej školy, školy umeleckého priemyslu a konzervatória vykoná maturitnú skúšku z matematiky ako dobrovoľný predmet.

(1, § 74) V školách alebo v triedach s bilingválnym vzdelávaním, v ktorých sa vzdelávanie riadi medzinárodnou dohodou, sa maturitná skúška vykonáva podľa tejto dohody a podľa vykonávacieho protokolu. (1, § 76) Pre žiaka, ktorý ukončuje štúdium týmto spôsobom, nie je povinné vykonanie externej časti maturitnej skúšky z tých predmetov, ktorých formu maturitnej skúšky osobitne upravuje medzinárodná dohoda.

(1, § 74) V školách alebo v triedach, v ktorých sa vyučuje podľa medzinárodných programov (1, § 7 ods. 6), sa maturitná skúška vykonáva podľa pravidiel príslušného medzinárodného programu. Maturitná skúška vykonaná podľa medzinárodného programu sa považuje za rovnocennú s maturitnou skúškou podľa zákona (1).

(2, § 15) Ak si žiak bilingválneho vzdelávania zvolí vykonanie externej časti maturitnej skúšky, vykonáva ju rovnakým spôsobom, ako žiak štúdia, ktoré sa uskutočňuje v slovenskom jazyku.

Prihlásenie žiaka na maturitnú skúšku z matematiky

(1, § 75) Žiak posledného ročníka príslušného vzdelávacieho programu študijného odboru v strednej škole do 30. septembra písomne oznámi riaditeľovi školy alebo poverenému pedagogickému zamestnancovi predmety, ktoré si na maturitnú skúšku zvolil. Žiak so zdravotným znevýhodnením oznámi aj spôsob vykonania maturitnej skúšky.

Žiak, ktorý dobrovoľne koná maturitnú skúšku z ďalšieho predmetu, do 30. septembra písomne oznámi riaditeľovi školy alebo poverenému pedagogickému zamestnancovi predmet, ktorý si na skúšku zvolil. Žiak so zdravotným znevýhodnením oznámi aj spôsob vykonania maturitnej skúšky z ďalšieho predmetu.

Zmenu predmetov, zmenu spôsobov vykonania maturitnej skúšky alebo dodatočné prihlásenie žiak písomne oznámi riaditeľovi školy alebo poverenému pedagogickému zamestnancovi najneskôr do 15. októbra; riaditeľ školy môže v osobitných prípadoch, najmä ak ide o dlhodobý pobyt v zahraničí alebo zdravotný stav, povoliť iný termín, najneskôr do 31. januára. Odhlásenie predmetov, z ktorých žiak koná maturitnú skúšku dobrovoľne, žiak písomne oznámi riaditeľovi školy najneskôr do 31. marca.

Termíny konania maturitnej skúšky

(1, § 77) Maturitná skúška sa koná v riadnom skúšobnom období (marec až jún príslušného školského roka) alebo v mimoriadnom skúšobnom období (apríl až máj príslušného školského roka alebo september, alebo február nasledujúceho školského roka).

Termín konania externej časti maturitnej skúšky z matematiky určí ministerstvo školstva. Termín ústnej formy internej časti maturitnej skúšky určí na návrh riaditeľa strednej školy príslušný orgán miestnej štátnej správy v školstve (Regionálny úrad školskej správy v sídle kraja, RÚŠS).

Riadny termín externej časti maturitnej skúšky pre každý predmet je spravidla jeden deň počas jedného týždňa v mesiaci marec, riadny termín ústnej formy internej časti maturitnej skúšky je spravidla jeden týždeň koncom mája až začiatkom júna.

Mimoriadne skúšobné obdobie slúži žiakom na vykonanie náhradnej maturitnej skúšky alebo opravnej maturitnej skúšky.

Náhradná maturitná skúška je určená pre žiaka, ktorý úspešne ukončil posledný ročník štúdia najneskôr k 15. septembru, a pre žiaka, ktorý sa pre vážne, najmä zdravotné dôvody, nemohol zúčastniť na maturitnej skúške, svoju neúčasť ospravedlnil riaditeľovi školy (spravidla do troch dní od konania skúšky) a predložil žiadosť o konanie skúšky v náhradnom termíne (1, § 89). Náhradná maturitná skúška z externej časti maturitnej skúšky sa koná v apríli až máji príslušného školského roka, v septembri nasledujúceho školského roka alebo v riadnom skúšobnom období nasledujúceho školského roka. Náhradná maturitná skúška z internej časti maturitnej skúšky sa koná v septembri alebo vo februári nasledujúceho školského roka.

Opravný termín maturitnej skúšky z externej časti maturitnej skúšky sa koná v mimoriadnom skúšobnom období v septembri nasledujúceho školského roka alebo v riadnom skúšobnom období nasledujúceho školského roka. Opravná maturitná skúška z internej časti maturitnej skúšky sa koná v septembri alebo vo februári nasledujúceho školského roka.

Na náhradnú maturitnú skúšku a opravnú maturitnú skúšku externej časti maturitnej skúšky, ktorá sa koná v septembri nasledujúceho školského roka, sa žiak prihlási riaditeľovi školy do 30. júna; alebo do 30. septembra nasledujúceho školského roka, ak sa opravná skúška koná v riadnom skúšobnom období nasledujúceho školského roka. Miesto konania náhradnej maturitnej skúšky a opravnej maturitnej skúšky externej časti maturitnej skúšky určí žiakovi príslušný orgán miestnej štátnej správy v školstve (RÚŠS) do 30 dní pred konaním maturitnej skúšky.

Maturitné komisie

(1, § 80) Organizáciu a priebeh maturitnej skúšky zabezpečujú:

a) ústredná maturitná komisia,

b) školská maturitná komisia,

c) predmetová maturitná komisia.

Predsedu a ostatných členov ústrednej maturitnej komisie vymenúva a odvoláva minister školstva.

(2, § 23) Školskú maturitnú komisiu tvorí:

a) predseda,

b) riaditeľ školy,

c) predsedovia predmetových maturitných komisií a

d) podpredseda, ak ide o školskú maturitnú komisiu v triedach s bilingválnym vzdelávaním.

Predsedom školskej maturitnej komisie môže byť len pedagogický zamestnanec navrhnutý riaditeľom, ktorý najmenej štyri roky vykonával pracovnú činnosť pedagogického zamestnanca. Predsedu školskej maturitnej komisie nemožno vymenovať z pedagogických zamestnancov strednej školy, v ktorej sa maturitná skúška koná.

Predsedom školskej maturitnej komisie v triedach s bilingválnym vzdelávaním môže byť len pedagogický zamestnanec navrhnutý riaditeľom,

a) ktorý úspešne vykonal štátnu jazykovú skúšku z druhého vyučovacieho jazyka alebo

b) ktorého druhý vyučovací jazyk je jeho materinským jazykom.

(2, § 25) Predseda školskej maturitnej komisie:

a) riadi prácu školskej maturitnej komisie,

b) zodpovedá za priebeh konania maturitnej skúšky a organizáciu maturitnej skúšky,

c) vykonáva dohľad nad priebehom maturitnej skúšky,

d) zodpovedá za správnosť protokolu o maturitnej skúške,

e) podpisuje vysvedčenie o maturitnej skúške,

f) vypracúva správu o priebehu a celkovej úrovni maturitnej skúšky, ktorú odovzdáva príslušnému orgánu miestnej štátnej správy v školstve.

Ak predseda školskej maturitnej komisie nemôže zo závažných dôvodov vykonávať funkciu a nie je vymenovaný nový predseda, zastúpi ho riaditeľ.

(2, § 24) Maturitná skúška z jednotlivých vyučovacích predmetov sa koná pred príslušnou predmetovou maturitnou komisiou.

Predmetovú maturitnú komisiu tvoria predseda a dvaja skúšajúci.

Predsedom predmetovej maturitnej komisie môže byť len pedagogický zamestnanec navrhnutý riaditeľom, ktorý spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie príslušného vyučovacieho predmetu. Predsedu predmetovej maturitnej komisie nemožno vymenovať z pedagogických zamestnancov strednej školy, v ktorej sa maturitná skúška koná.

Predsedom predmetovej maturitnej komisie v triede s bilingválnym vzdelávaním pre vyučovacie predmety, z ktorých sa koná maturitná skúška v druhom vyučovacom jazyku, môže byť len pedagogický zamestnanec navrhnutý riaditeľom, ktorý:

a) spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie príslušného vyučovacieho predmetu a úspešne vykonal štátnu jazykovú skúšku z druhého vyučovacieho jazyka,

b) spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie príslušného vyučovacieho predmetu a druhý vyučovací jazyk je jeho materinským jazykom alebo

c) úspešne vykonal štátnu jazykovú skúšku z druhého vyučovacieho jazyka alebo druhý vyučovací jazyk je jeho materinským jazykom.

(2, § 25) Predseda predmetovej maturitnej komisie:

a) riadi prácu predmetovej maturitnej komisie,

b) zodpovedá za priebeh a pripravenosť konania maturitnej skúšky a organizáciu maturitnej skúšky z príslušného vyučovacieho predmetu,

c) zodpovedá za priebeh externej časti maturitnej skúšky z príslušného vyučovacieho predmetu,

d) zodpovedá za hodnotenie externej časti maturitnej skúšky z príslušného vyučovacieho predmetu (neplatí pre predmet matematika, kde hodnotenie testu externej časti maturitnej skúšky zabezpečuje organizácia zriadená ministerstvom školstva na plnenie úloh v oblasti monitorovania a hodnotenia kvality výchovy a vzdelávania),

e) zodpovedá za správnosť protokolu o administrácii testov externej časti maturitnej skúšky,

f) schvaľuje do 30. apríla maturitné zadania z príslušného vyučovacieho predmetu a ak má pochybnosti, môže požiadať o stanovisko Štátnu školskú inšpekciu,

h) podieľa sa na skúšaní a hodnotení žiaka,

i) zodpovedá za hodnotenie žiaka,

j) vypracúva správu o priebehu a celkovej úrovni maturitnej skúšky z príslušného vyučovacieho predmetu, ktorú odovzdáva predsedovi školskej maturitnej komisie.

Predseda školskej maturitnej komisie môže súčasne vykonávať aj funkciu predsedu predmetovej maturitnej komisie v tej istej strednej škole. Ak predseda predmetovej maturitnej komisie nemôže zo závažných dôvodov vykonávať funkciu a nie je vymenovaný nový predseda, zastúpi ho riaditeľ alebo zástupca riaditeľa školy.

(2, § 24) Skúšajúcim predmetovej maturitnej komisie je pedagogický zamestnanec príslušnej strednej školy. Skúšajúcim predmetovej maturitnej komisie môže byť len pedagogický zamestnanec, ktorý spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie vyučovacieho predmetu, z ktorého sa maturitná skúška koná.

Skúšajúcim predmetovej maturitnej komisie v triede s bilingválnym vzdelávaním pre vyučovacie predmety, z ktorých sa koná maturitná skúška v druhom vyučovacom jazyku, môže byť len pedagogický zamestnanec, ktorý spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie príslušného vyučovacieho predmetu. Najmenej jedným skúšajúcim tejto predmetovej maturitnej komisie môže byť len pedagogický zamestnanec, ktorý:

a) spĺňa kvalifikačné predpoklady na vyučovanie príslušného vyučovacieho predmetu a

b) úspešne vykonal štátnu jazykovú skúšku z druhého vyučovacieho jazyka alebo druhý vyučovací jazyk je jeho materinským jazykom.

(1, § 80) Predsedu školskej maturitnej komisie a predsedu predmetovej maturitnej komisie vymenúva do 1. marca príslušný orgán miestnej štátnej správy v školstve.

Predsedu školskej maturitnej komisie v triedach s bilingválnym programom vymenúva ministerstvo školstva do 15. marca. Podpredsedu školskej maturitnej komisie v triedach s bilingválnym programom vymenúva do 15. marca zahraničná strana.

(2, § 28) Predseda školskej maturitnej komisie, predseda predmetovej maturitnej komisie sa vymenúvajú na obdobie jedného roka odo dňa vymenovania.

(1, § 80) Skúšajúcich členov predmetovej maturitnej komisie vymenúva do 30. apríla riaditeľ školy.

Externá časť maturitnej skúšky z matematiky

(1, § 76) Externú časť maturitnej skúšky z matematiky tvorí test, ktorý zadáva a vyhodnocuje organizácia zriadená ministerstvom školstva na plnenie úloh v oblasti monitorovania a hodnotenia kvality výchovy a vzdelávania.

(2, Príloha č. 2, II. časť) Externá časť maturitnej skúšky sa vykonáva podľa II. časti prílohy č. 2 vyhlášky (2). Centrálne vypracovaný písomný test sa skladá z 20 úloh s krátkou odpoveďou a z 10 úloh s výberom jednej správnej odpovede z piatich ponúkaných odpovedí. Test obsahuje úlohy rôznej obťažnosti a kognitívnej úrovne, vychádzajúce z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky (4). Čas na vyriešenie úloh testu je 150 minút. Správna odpoveď každej z úloh sa hodnotí rovnako jedným bodom. Počas riešenia testu z matematiky je možné používať bežné písacie potreby, prehľad vzťahov na poslednom liste testu a kalkulačku, ktorá nie je súčasťou mobilného telefónu, nedokáže vykresľovať grafy, zjednodušovať algebrické výrazy obsahujúce premenné a počítať korene rovníc. Podrobnú špecifikáciu testu (5) každoročne zverejňuje Národný inštitút vzdelávania a mládeže NIVaM na svojom webovom sídle.

(1, § 76) Externá časť maturitnej skúšky sa vykonáva v rovnakom čase vo všetkých stredných školách na celom území Slovenskej republiky. Externá časť maturitnej skúšky sa môže vykonávať aj elektronickou formou. Dozor pri vykonávaní externej časti maturitnej skúšky vykonáva pedagogický zamestnanec, ktorý nie je zamestnancom školy, v ktorej sa externá časť maturitnej skúšky koná (predseda predmetovej maturitnej komisie).

Ak sa externá časť maturitnej skúšky uskutočnila v rozpore so zákonom (1) alebo ak sa nedodržala zásada rovnakého zaobchádzania podľa osobitného predpisu, minister školstva vyhlási konanie tejto maturitnej skúšky za neplatné. Nový termín konania maturitnej skúšky vyhlási minister školstva.

Ústna forma internej časti maturitnej skúšky z matematiky

(1, § 76) Pred začiatkom konania internej časti maturitnej skúšky sa žiak päť po sebe nasledujúcich vyučovacích dní nezúčastňuje na vyučovaní. Tieto dni sú určené na prípravu žiaka na maturitnú skúšku.

(2, § 15) Priebeh internej časti maturitnej skúšky je verejný. V jeden deň možno vykonať internú časť maturitnej skúšky najviac z troch predmetov. Internú časť maturitnej skúšky možno vykonať v priebehu najviac piatich pracovných dní. Maturitná skúška sa vykonáva v jazyku, v ktorom sa príslušný predmet vyučoval. Ak sa v bilingválnom vzdelávaní vyučuje predmet súčasne v dvoch vyučovacích jazykoch, maturitná skúška sa vykonáva v jazyku podľa školského vzdelávacieho programu.

(2, § 10) Interná časť maturitnej skúšky z matematiky sa koná ústnou formou. Ústna forma internej časti maturitnej skúšky sa vykonáva podľa III. časti prílohy č. 2 vyhlášky (2) a podľa katalógu cieľových požiadaviek pre predmet matematika (4).

(2, Príloha č. 2, III. časť) Ústnu formu internej časti maturitnej skúšky tvorí ústna odpoveď žiaka pred predmetovou maturitnou komisiou, pričom si žiak žrebuje jedno zo schválených maturitných zadaní. (2, § 15) Maturitné zadania ústnej formy internej časti maturitnej skúšky, s uvedením zoznamu pomôcok, ktoré môže žiak používať, schvaľuje riaditeľ školy na návrh predsedu príslušnej predmetovej komisie školy do 31. marca; návrh predkladá predseda predmetovej komisie riaditeľovi do 15. marca. (2, § 25 f) Následne musí maturitné zadania schváliť aj vymenovaný predseda predmetovej maturitnej komisie matematiky do 30. apríla. (2, Príloha č. 2, III. časť) Maturitné zadania a úlohy v nich možno schváliť, ak sú v súlade s katalógom cieľových požiadaviek pre príslušný predmet maturitnej skúšky. Maturitné zadania sa zverejnia sedem dní pred termínom konania ústnej formy internej časti maturitnej skúšky v príslušnej škole. Usmernenie k spôsobu zverejnenia maturitných zadaní je uvedené v (3): Škola zverejní sedem dní pred termínom konania ústnej formy internej časti maturitnej skúšky v príslušnej škole zadania ústnej formy internej časti maturitnej skúšky s cieľom poskytnúť žiakom posledných ročníkov informáciu o tematickom zameraní úloh v jednotlivých maturitných zadaniach. Zverejnenie maturitných zadaní neznamená zverejnenie konkrétnych úloh, obrázkov, grafov, máp alebo literárnych ukážok, ale poskytnutie informácie o skladbe zadania t. j. len o názvoch príslušných tém a o všeobecnom obsahovom vymedzení úloh a informácie o zameraní jednotlivých úloh z hľadiska požadovaných myšlienkových operácií, kompetencií a metód vykonania maturitnej skúšky.

(4) Každé maturitné zadanie z matematiky sa skladá z troch úloh. Úlohy žiadneho maturitného zadania nemôžu byť len z jedného tematického okruhu. V maturitných zadaniach musia byť zastúpené všetky tematické celky z cieľových požiadaviek.

(4) Charakteristika úloh maturitných zadaní:
Úloha č. 1 – Žiak objasní (definuje) dané pojmy, uvedie ich príklady a kontrapríklady, sformuluje ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami. Prevláda forma monológu.
Úloha č. 2 – Úloha je zameraná na argumentáciu a dôvodenie. Prevláda forma dialógu s členmi predmetovej maturitnej komisie.

Úloha č. 3 – Úloha je zameraná na postup riešenia príslušnej úlohy s rôznymi alternatívami. Prípadné vopred pripravené doplňujúce otázky budú zamerané na alternatívy pri iných číselných zadaniach.

(2, Príloha č. 2, III. časť) Pre každý predmet maturitnej skúšky sa učebné pomôcky členia na všeobecné a konkrétne. Všeobecnými učebnými pomôckami sú pomôcky, ktoré má každý žiak v strednej škole k dispozícii počas konania príslušnej časti maturitnej skúšky. Stredná škola zabezpečí žiakovi prístup k všeobecným učebným pomôckam v príslušnom predmete maturitnej skúšky.

(4) Všeobecné pomôcky pre maturitnú skúšku z matematiky:

- Prehľad vzťahov pre riadny termín externej časti maturitnej skúšky z matematiky (aktuálny v danom školskom roku, je súčasťou testu).
- Kalkulačka, ktorá nie je súčasťou mobilného telefónu, nedokáže vykresľovať grafy, zjednodušovať algebrické výrazy obsahujúce premenné, počítať korene rovníc.

(2, Príloha č. 2, III. časť) Konkrétnymi učebnými pomôckami sú učebné pomôcky, ktoré priamo súvisia s príslušným maturitným zadaním. Súčasťou príslušného maturitného zadania je aj uvedenie konkrétnej učebnej pomôcky.

(2, Príloha č. 2, III. časť) Obsah maturitných zadaní zohľadňuje aj čas určený na trvanie maturitnej skúšky pozostávajúcej z prípravy (20 minút) a odpovede (20 minút) žiaka. Minimálny počet maturitných zadaní je 30. Každé maturitné zadanie sa použije iba jedenkrát v príslušnom dni a v jednej predmetovej maturitnej komisii v tej istej strednej škole.

(2, § 15) Maturitná skúška (okrem jej externej časti) sa vykonáva pred predmetovou maturitnou komisiou. V jednom vyučovacom dni možno pred jednou predmetovou maturitnou komisiou vyskúšať najviac 24 žiakov. Čas vyčlenený pre jedného žiaka je 20 minút na prípravu pred odpoveďou a 20 minút na odpoveď (2, Príloha č. 2, I. časť). Ak ide o žiaka, ktorý je cudzincom, čas konania jednotlivých častí maturitnej skúšky sa upravuje (2, Príloha č. 2, VI. časť). Pri konaní maturitnej skúšky je jednou hodinou maturitnej skúšky 60 minút.

(2, Príloha č. 2, III. časť) Skúšajúci predmetovej maturitnej komisie riadi rozhovor so žiakom, kladie pomocné otázky, vyjadruje súhlas alebo nesúhlas s tvrdeniami žiaka a vedie ho k tomu, aby svoje názory podopieral argumentmi a využíval pri tom písomnú prípravu a vlastné poznatky získané počas prípravy na maturitnú skúšku. Členovia predmetovej maturitnej komisie dbajú na to, aby žiak mohol na ich podnety reagovať plynulo a mal vhodné podmienky na vyjadrenie svojich myšlienok.

Klasifikácia a hodnotenie ukončovania štúdia

(2, § 17) Každá časť maturitnej skúšky sa hodnotí osobitne a hodnotenie sa uvádza na vysvedčení o maturitnej skúške.

Klasifikácia žiaka z externej časti maturitnej skúšky sa vyjadruje percentom úspešnosti s príslušným percentilom (ak skúšku vykoná najmenej 30 žiakov). Hodnotenie vyjadrené percentami úspešnosti a percentilom sa zaokrúhľuje na jedno desatinné miesto.

(1, § 86) Výsledky klasifikácie externej časti maturitnej skúšky oznámi riaditeľ školy žiakovi najneskôr desať dní pred termínom konania internej časti maturitnej skúšky, ak ju koná v riadnom skúšobnom období. Ústnu formu internej časti maturitnej skúšky možno vykonať bez ohľadu na výsledok externej časti maturitnej skúšky.

(2, § 17) Klasifikácia žiaka z ústnej formy internej časti maturitnej skúšky sa vyjadruje klasifikačným stupňom, ktorý sa vypočíta ako vážený priemer klasifikačných stupňov z odpovedí na jednotlivé úlohy maturitného zadania.

(4) Každá úloha maturitného zadania ústnej formy internej časti maturitnej skúšky sa hodnotí samostatne stupňom prospechu 1 až 5. Váha hodnotenia jednotlivých úloh je 1 : 2 : 2. Pri výpočte váženého priemeru sa používa vzťah:

$$z = \frac{z_1 + 2.z_2 + 2.z_3}{5}$$

pričom *z* je po zaokrúhlení výsledný stupeň prospechu a z_i je stupeň prospechu za úlohu č. *i*.

(2, § 17) Vážený priemer sa zaokrúhľuje na celé číslo. Vážený priemer vyjadrený číslom s desatinnou časťou najviac 0,5 sa zaokrúhľuje na celé číslo nadol a vážený priemer vyjadrený číslom s desatinnou časťou viac ako 0,5 sa zaokrúhľuje na celé číslo nahor.

(1, § 86) Ak sa hodnotenie internej časti maturitnej skúšky výrazne odlišuje od dosiahnutých výsledkov žiaka počas jeho štúdia z predmetu maturitnej skúšky, pri výslednej známke internej časti maturitnej skúšky sa prihliada na stupne klasifikácie žiaka z tohto predmetu počas jeho štúdia.

Žiak, zákonný zástupca žiaka alebo ním poverená osoba alebo zástupca zariadenia, v ktorom je neplnoleté dieťa umiestnené na základe rozhodnutia súdu v zariadení ústavnej starostlivosti (ďalej len žiadateľ), môže podať prostredníctvom riaditeľa školy písomné námietky voči hodnoteniu internej časti maturitnej skúšky do ôsmich dní od jej vykonania Štátnej školskej inšpekcii. Ak je opodstatnená námietka voči hodnoteniu internej časti maturitnej skúšky, môže Štátna školská inšpekcia nariadiť komisionálne preskúšanie pri zistení nedostatkov pri klasifikácii za prítomnosti školského inšpektora. Skúška sa koná pred predmetovou maturitnou komisiou v pôvodnom zložení.

(2, § 17) Žiak úspešne vykoná maturitnú skúšku z matematiky (predmet, ktorý má externú časť maturitnej skúšky, nemá písomnú formu internej časti maturitnej skúšky, má ústnu formu internej časti maturitnej skúšky), ak jeho hodnotenie z ústnej formy internej časti maturitnej skúšky:
a) nie je horšie ako klasifikačný stupeň 3 – dobrý a v externej časti maturitnej skúšky získa úspešnosť vyššiu ako 25 % alebo
b) je klasifikačný stupeň 4 – dostatočný a v externej časti maturitnej skúšky získa úspešnosť vyššiu ako 33 %.

Žiak úspešne vykoná externú časť maturitnej skúšky z matematiky ako dobrovoľný predmet, ak v nej získa úspešnosť vyššiu ako 33 %.

(1, § 86) Žiak úspešne vykonal maturitnú skúšku, ak úspešne vykonal maturitnú skúšku zo všetkých predmetov maturitnej skúšky. Ak žiak neuspel na maturitnej skúške z dobrovoľného predmetu maturitnej skúšky, táto skutočnosť nemá vplyv na úspešné vykonanie maturitnej skúšky a na vysvedčení o maturitnej skúške sa neuvádza.

Opravná skúška

(1, § 88) Ak žiak na maturitnej skúške z niektorých, najviac však z dvoch predmetov, neúspešne vykonal maturitnú skúšku, školská maturitná komisia môže žiakovi povoliť konať opravnú skúšku z týchto predmetov, časti skúšky z týchto predmetov, foriem internej časti maturitnej skúšky alebo ich kombinácie.

Žiak môže opravnú skúšku konať na jeho žiadosť najneskôr do troch rokov od ukončenia posledného ročníka strednej školy. Opravnú skúšku internej časti maturitnej skúšky žiak koná na strednej škole, na ktorej konal maturitnú skúšku. Ak žiak koná opravnú skúšku z predmetu, ktorý má externú časť maturitnej skúšky a internú časť maturitnej skúšky, a koná ju zo všetkých častí, potom ústnu formu internej časti maturitnej skúšky môže konať v riadnom termíne.

Ak žiak na opravnej skúške z niektorých predmetov neúspešne vykonal maturitnú skúšku alebo bol na opravnej skúške klasifikovaný stupňom 5 – nedostatočný, školská maturitná komisia môže žiakovi povoliť konať druhú opravnú skúšku z týchto predmetov.

Žiak môže druhú opravnú skúšku konať na jeho žiadosť najneskôr do troch rokov od ukončenia posledného ročníka príslušnej strednej školy.

Žiakovi strednej školy, ktorý neúspešne vykonal maturitnú skúšku z viac ako dvoch predmetov alebo neúspešne vykonal maturitnú skúšku na niektorej opravnej skúške, môže školská maturitná komisia povoliť opakovať celú maturitnú skúšku.

Maturitnú skúšku môže žiak na jeho žiadosť opakovať iba raz v riadnom skúšobnom období, najneskôr do troch rokov od ukončenia posledného ročníka strednej školy.

Ustanovenia o ukončovaní štúdia

(1, § 89) Maturitnú skúšku môže žiak vykonať do troch rokov odo dňa, keď úspešne skončil posledný ročník strednej školy.

Žiak, ktorý pre vážne, najmä zdravotné dôvody, sa nezúčastní na maturitnej skúške, je povinný sa ospravedlniť riaditeľovi školy spravidla do troch dní od termínu konania skúšky. Ak ho riaditeľ školy ospravedlní, žiaka nemožno klasifikovať. Žiak súčasne predloží aj žiadosť o konanie skúšky v náhradnom termíne.

Ak žiak svoju neúčasť na maturitnej skúške neospravedlní alebo ak jeho ospravedlnenie nebude uznané, posudzuje sa, akoby dňom nasledujúcim po termíne konania skúšky štúdium zanechal. To neplatí, ak ide o maturitnú skúšku z predmetu, na ktorý sa žiak dobrovoľne prihlásil.

Ak sa žiak správa na maturitnej skúške nevhodným spôsobom, predseda predmetovej maturitnej komisie alebo dozerajúci učiteľ jeho skúšku preruší. Ak skúšku preruší predseda predmetovej maturitnej komisie, žiak opakuje skúšku, jej časť alebo formu v riadnom termíne nasledujúceho školského roka. Ak skúšku preruší pedagogický zamestnanec, ktorý vykonáva dozor, a predseda predmetovej maturitnej komisie nedovolí žiakovi v skúške pokračovať, žiak opakuje skúšku, jej časť alebo formu v riadnom termíne nasledujúceho školského roka.

(1, § 90) Žiakovi, ktorý úspešne vykonal maturitnú skúšku, sa vydá vysvedčenie o maturitnej skúške najneskôr do piatich dní od konania poslednej časti maturitnej skúšky; ak je poslednou časťou maturitnej skúšky externá časť maturitnej skúšky a koná sa v mimoriadnom skúšobnom období v septembri nasledujúceho školského roka, vysvedčenie o maturitnej skúške sa vydá najneskôr do desiatich dní od jej konania. Na vysvedčení je uvedené hodnotenie žiaka v jednotlivých predmetoch externej časti maturitnej skúšky vrátane percentilu a všetkých foriem internej časti maturitnej skúšky. Na vysvedčení sa uvedie dátum konania poslednej časti maturitnej skúšky.

Žiakovi triedy s bilingválnym vzdelávaním, v ktorej sa vzdelávanie riadi medzinárodnou dohodou alebo žiakovi triedy s medzinárodným programom, ktorý úspešne vykonal maturitnú skúšku podľa tohto zákona (1), sa vydá vysvedčenie o maturitnej skúške v obidvoch vyučovacích jazykoch, prípadne vysvedčenie v slovenskom jazyku a vysvedčenie v druhom vyučovacom jazyku.

(1, § 91) Dňom nasledujúcim po dni, keď žiak vykonal úspešne maturitnú skúšku, prestáva byť žiakom školy.

Ak žiak strednej školy nevykonal v určenom termíne maturitnú skúšku a bola mu povolená opravná skúška, odklad skúšky alebo jej opakovanie, zachovávajú sa mu práva a povinnosti žiaka do konca školského roka, v ktorom mal štúdium skončiť. Zánikom práv a povinností žiaka nie je dotknutá možnosť vykonať maturitnú skúšku.

(1, § 92) Žiakom školy prestáva byť aj žiak, ktorému nebolo povolené opakovať ročník alebo maturitnú skúšku.

2. PRÍKLADY MATURITNÝCH ÚLOH

2.1 Základy matematiky: Logika a množiny

2.1.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: výrok, axióma, definícia, hypotéza a tvrdenie. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Objasnite pojmy: konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia. Uveďte ich príklady. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt určte pravdivostné hodnoty výrokov zložených z jednoduchých výrokov.

3. úloha

Objasnite pojem negácia výroku (aj so všeobecným a existenčným kvantifikátorom). Vysvetlite negáciu konjunkcie a disjunkcie. Uveďte ich príklady.

4. úloha

Vysvetlite pojmy: priamy dôkaz, nepriamy dôkaz a dôkaz sporom. Uveďte ich príklady. Sformulujte súvislosť uvedených dôkazov s poznatkami o pravdivosti implikácie.

5. úloha

Objasnite pojmy: zjednotenie, prienik a rozdiel množín, doplnok množiny. Uveďte ich príklady, pričom použite Vennove diagramy.

2.1.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Dokážte sporom výrok: $\sqrt{3}$ *je iracionálne číslo.*

2. úloha

Dokážte priamo, že súčet dvoch ľubovoľných párnych čísel je párne číslo.

3. úloha

Dokážte nepriamo, že pre všetky prirodzené čísla n platí: Ak 25 nedelí n^2, potom 5 nedelí n.

4. úloha

Zdôvodnite vzťahy pre doplnok zjednotenia a prieniku množín (de Morganove pravidlá).

5. úloha

Zdôvodnite vzťah pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín.

2.1.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Určte, či dané vetné konštrukcie sú výrokmi:

a) Dnes je slnečno.

b) Každý z nás je jedinečný.

c) Adam meria 186 cm.

d) Super.

e) $x \leq 7$

f) $\forall x \in R : x \leq 7$

g) $\exists x \in R : x \leq 7$

h) Táto veta je nepravdivá.

i) Číslo 1 je prvočíslo.

2. úloha

a) Dané sú výroky 1 – 5:

Výrok 1: *Klame Eva a nie Adam.*

Výrok 2: *Nie je pravda, že Eva klame a aj Adam klame.*

Výrok 3: *Ani Eva, ani Adam neklame.*

Výrok 4: *Eva klame vtedy, ak klame Adam.*

Výrok 5: *Adam klame vtedy, ak klame Eva.*

Výrok „*Eva klame.*“ označte A, výrok „*Adam klame.*“ označte B.

Zapíšte zložené výroky z výrokov A a B pomocou logických spojok.

b) Určte, ktoré z výrokov 1 – 5 v úlohe a) sú pravdivé, ak by klamala iba Eva.

c) Určte, ktoré z výrokov 1 – 5 v úlohe a) sú pravdivé, ak by klamal iba Adam.

d) Určte, ktoré z výrokov 1 – 5 v úlohe a) sú pravdivé, ak by klamali obaja.

3. úloha

Dokážte:

a) nepriamo,

b) sporom,

že pre každé celé číslo n platí: Ak je číslo n^2 nepárne, potom číslo n je nepárne číslo.

4. úloha

Zapíšte vymenovaním prvkov množiny:

a) $A = \{x \in Z; -2 < x \leq 4\}$,

b) $B = \{x \in N; |x| < 5\}$,

c) $C = \{x \in N; -3 \leq x < 6\}$,

d) D je množina všetkých prvočísel, ktoré sú deliteľmi čísla 420,

e) E je množina všetkých celočíselných koreňov rovnice $(x-1)(x+2) = 0$.

5. úloha

Dané sú množiny A a B: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in Z; -4 < x \leq 5\}$.

a) Určte $A \cup B$,

b) Určte $A \cap B$,

c) Určte $A - B$,

d) Určte $B - A$.

2.2 Základy matematiky: Čísla, premenné a výrazy

2.2.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov a hodnota výrazu. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

2. úloha

Objasnite pojmy: mnohočlen, člen mnohočlena a stupeň mnohočlena. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

3. úloha

Objasnite pojmy: prirodzené, celé, nezáporné, záporné, racionálne, iracionálne a reálne čísla. Uveďte ich príklady, sformulujte ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami.

4. úloha

Objasnite pojem zlomok a pojmy s ním súvisiace: čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara. Na príklade vysvetlite úpravu zloženého zlomku na jednoduchý.

5. úloha

Vysvetlite pojmy: odmocnina (druhá, *n*-tá), mocnina (s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom), exponent a základ mocniny. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

2.2.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Na príklade zdôvodnite vzťah pre násobenie (delenie) mocnín s rovnakým základom.

2. úloha

Zdôvodnite, prečo sa základ logaritmu nesmie rovnať číslu 1.

3. úloha

Pomocou jednotkovej kružnice zdôvodnite vzťahy $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

4. úloha

Pomocou jednotkovej kružnice a Pytagorovej vety zdôvodnite vzťah $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

5. úloha

Pomocou jednotkovej kružnice zdôvodnite vzťah $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2.2.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Prepíšte čísla z dvojkovej sústavy do desiatkovej sústavy:

a) $(1001101)_2$

b) $(100001)_2$

c) $(111010)_2$

2. úloha

Zapíšte slovný text algebraicky (pomocou premenných, čísel a rovností):

a) Číslo *x* je štvornásobok čísla *y* zväčšený o 3.

b) Číslo *y* je trojnásobok čísla *x* zväčšeného o 1.

c) Šestina z čísla *a* zmenšeného o 2 je o 7 väčšia ako číslo *b*.

d) 75 % z čísla *t* je o *u* menšie ako číslo *v*.

3. úloha

Určte obor definície výrazov:

a) $\frac{30-8x}{\sqrt{x^2-x-6}}$,

b) $\frac{5\sqrt{x^2-4}}{14-7x}$.

4. úloha

Zo vzorcov (vzťahov) vyjadrite neznámu uvedenú v hranatej zátvorke:

a) $S = \frac{(a+c).v}{2}$ $\quad [c]$

b) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ $\quad [v]$

c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad [r]$

5. úloha

Upravte výrazy a určte ich definičný obor:

a) $\frac{(a+3)!}{(a+1)!.(a^2-4)}$,

b) $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$,

c) $\frac{\left(9a^2b^3\right)^4}{(5a^3b^4)^3}:\frac{\left(3ab^2\right)^6}{(5ab^5)^3}$.

2.3 Základy matematiky: Teória čísel

2.3.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: deliteľ, násobok, deliteľnosť. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

2. úloha

Objasnite pojmy: najväčší spoločný deliteľ (NSD) a najmenší spoločný násobok (NSN). Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

3. úloha

Vysvetlite pojmy: prvočíslo, zložené číslo, prvočíselný rozklad a prvočiniteľ. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

4. úloha

Objasnite pojmy: súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

5. úloha

Objasnite pojmy: deliteľnosť a zvyšok. Opíšte znaky deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 na príkladoch.

2.3.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Dokážte tvrdenie, že prvočísel je nekonečne veľa.

2. úloha

Dokážte, že každé prirodzené číslo deliteľné šiestimi je deliteľné aj dvomi.

3. úloha

Dokážte implikáciu:

Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné 3, tak jeho druhá mocnina má po delení 3 zvyšok 1.

4. úloha

Pomocou protipríkladu (kontrapríkladu) zdôvodnite nepravdivosť tvrdenia:

Pre každú trojicu prirodzených čísel a, b, c platí: ak a delí $(b + c)$, tak a delí b a súčasne a delí c.

5. úloha

Zdôvodnite:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné dvomi nesúdeliteľnými číslami k, r, tak je deliteľné aj číslom $k\,.\,r$.

2.3.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Zistite bez delenia, či sú čísla 234, 288 a 368 deliteľné číslami 6, 8 a 9.

2. úloha

Metódou prvočíselného rozkladu nájdite NSN čísel 900 a 588.

3. úloha

Pomocou prvočíselného rozkladu nájdite NSD čísel 900 a 588.

4. úloha

Zistite bez delenia, či sú čísla 570 a 840 deliteľné číslami 12 a 15.

5. úloha

Vypočítajte počet štvorciferných prirodzených čísel deliteľných číslom 35.

2.4 Základy matematiky: Rovnice, nerovnice a ich sústavy

2.4.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojmy: rovnica, sústava rovníc a ich riešenie, substitúcia, koreň, kontrola riešenia (skúška správnosti). Uveďte príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

2. úloha

Objasnite pojmy: nerovnica, sústava nerovníc a ich riešenie, kontrola riešenia (skúška správnosti). Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

3. úloha

Vysvetlite pojmy: ekvivalentné a neekvivalentné úpravy rovnice a nerovnice. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

4. úloha

Objasnite pojmy: rovnica, lineárny člen, koeficient pri lineárnom člene. Uveďte príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

5. úloha

Vysvetlite pojmy: rovnica, kvadratický člen, koeficient pri kvadratickom člene, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin. Uveďte príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

2.4.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi hodnotou diskriminantu a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice.

2. úloha

Odvoďte vzorec pre korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s nezáporným diskriminantom.

3. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi konkrétnymi ekvivalentnými úpravami rovnice a množinou koreňov rovnice.

4. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi konkrétnymi neekvivalentnými úpravami rovnice a množinou koreňov rovnice.

2.4.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Riešte v *R* rovnicu $x^2 - 3x - 10 = 0$

a) pomocou diskriminantu,

b) pomocou Viètových vzťahov.

2. úloha

Napíšte kvadratickú rovnicu, ktorá

a) nemá koreň,

b) má jediný koreň $x = 3$,

c) má dva korene $x_1 = 2, x_2 = -5$.

3. úloha

Riešte v R^2 sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi a geometricky interpretujte množinu všetkých koreňov danej sústavy: $3x + 4y = 11$, $5x + 2y = 9$.

4. úloha

Riešte v *R* alebo v *N* sústavu dvoch nerovníc s jednou neznámou: $x > \frac{x-1}{3}, x - 4 < -\frac{x+1}{2}$.

5. úloha

Riešte v *R* alebo v *N* rovnicu $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ pomocou substitúcie.

2.5 Funkcie: Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

2.5.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojem funkcia a vysvetlite pojmy: argument funkcie, funkčná hodnota, definičný obor funkcie, obor hodnôt a graf funkcie. Sformulujte súvislosti medzi nimi a ilustrujte na príklade.

2. úloha

Vysvetlite pojmy: rast/klesanie funkcie, lokálne maximum/lokálne minimum funkcie. Uveďte príklady pre objasnenie súvislosti daných pojmov.

3. úloha

Objasnite pojem inverzná funkcia k funkcii a vysvetlite spôsob nájdenia jej predpisu. Na konkrétnom príklade objasnite súvislosti medzi vlastnosťou monotónnosti funkcie a existenciou inverznej funkcie na intervale.

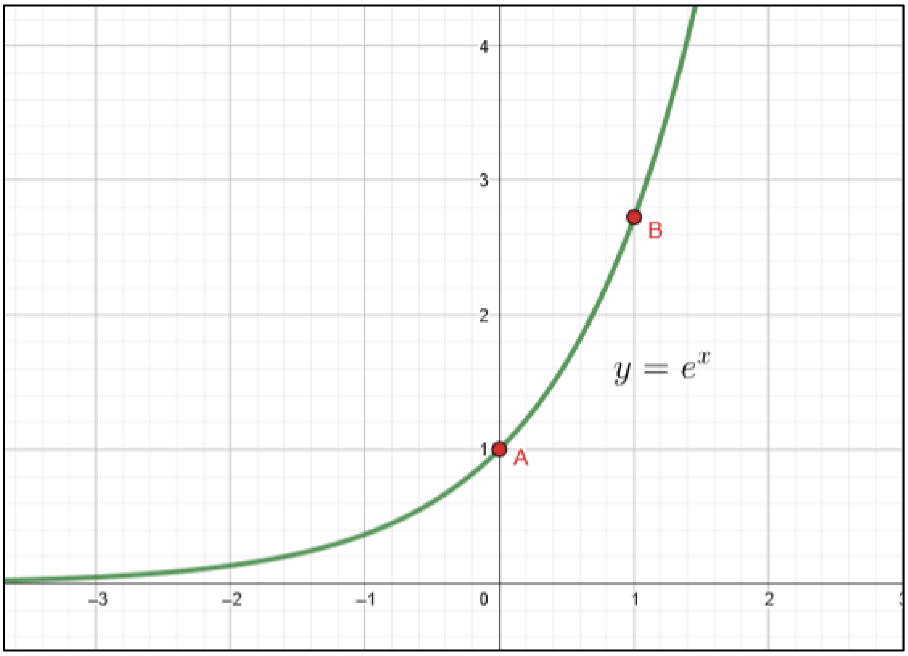
4. úloha

Vysvetlite pojem postupnosť. Vymenujte spôsoby, ako možno postupnosť definovať. Objasnite pojem monotónnej postupnosti, ohraničenej postupnosti. Uveďte príklad postupnosti, ktorá je ohraničená a súčasne klesajúca.

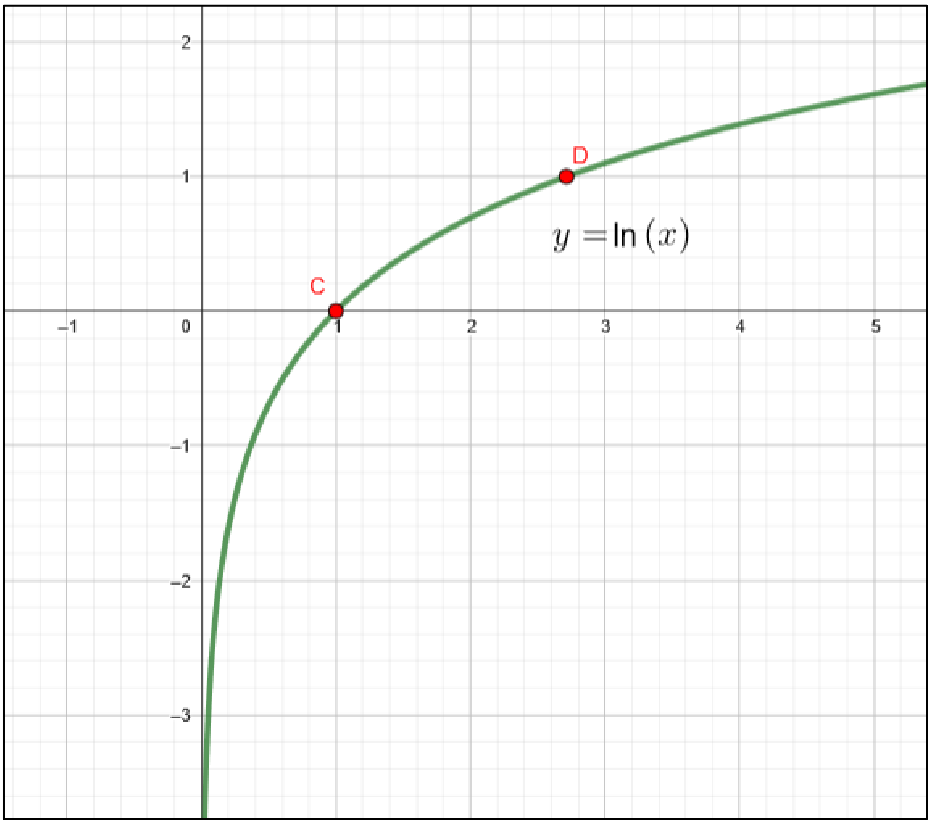
2.5.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

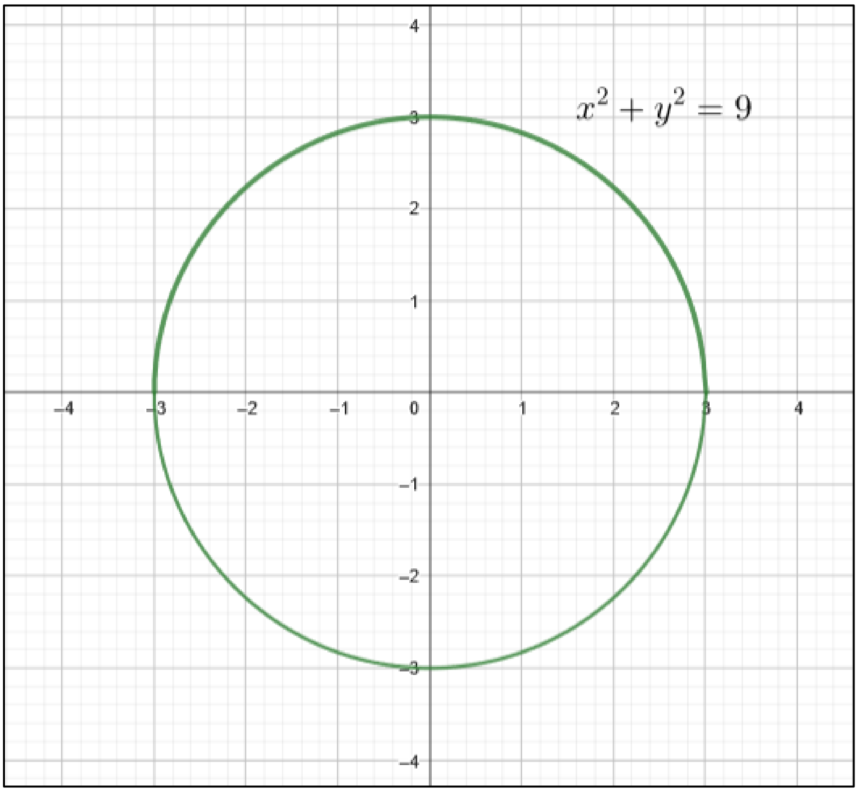
Na každom z obrázkov je zelenou farbou znázornená čiara v súradnicovej rovine (O, x, y):



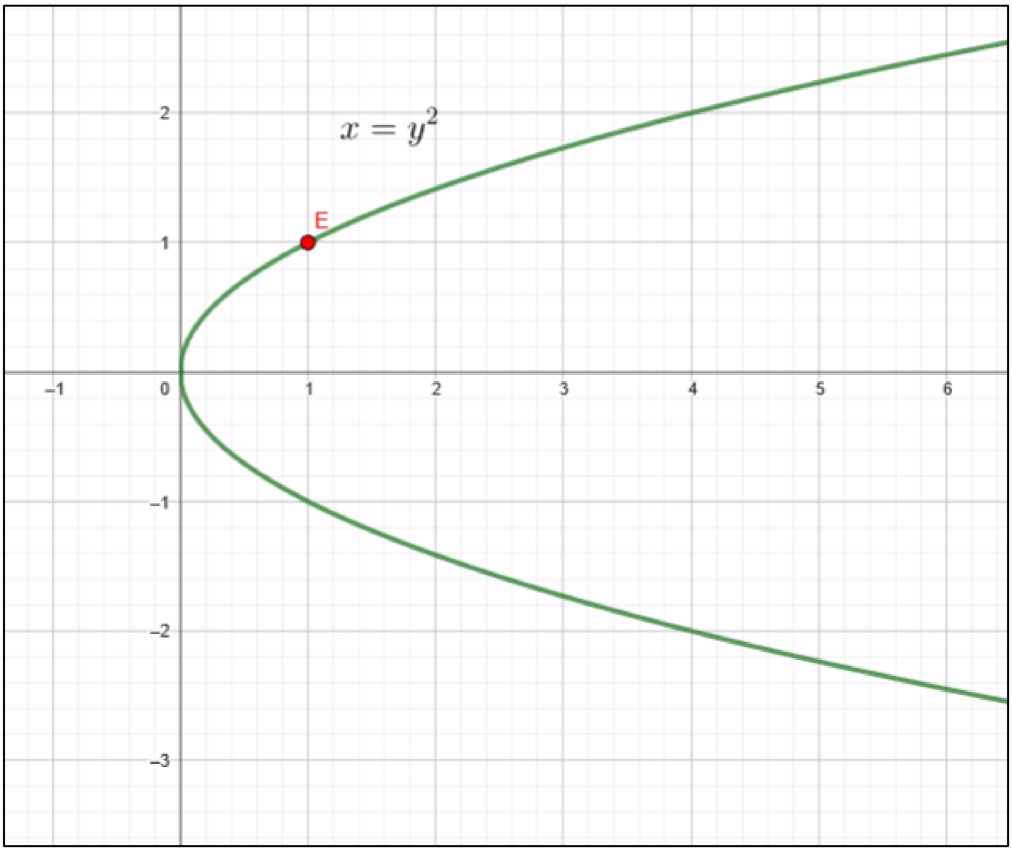
Obr. 1



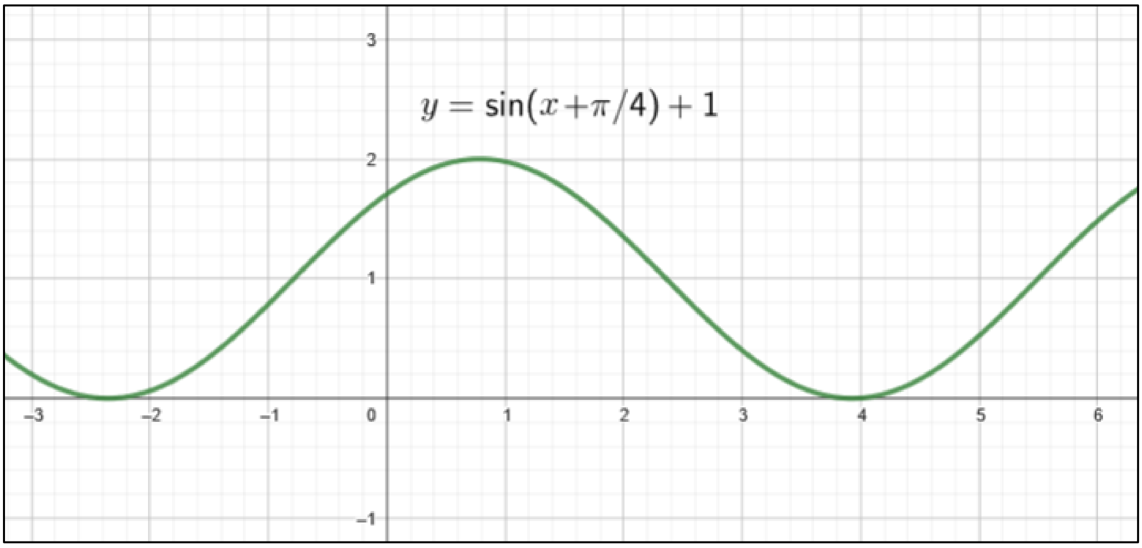
Obr. 2



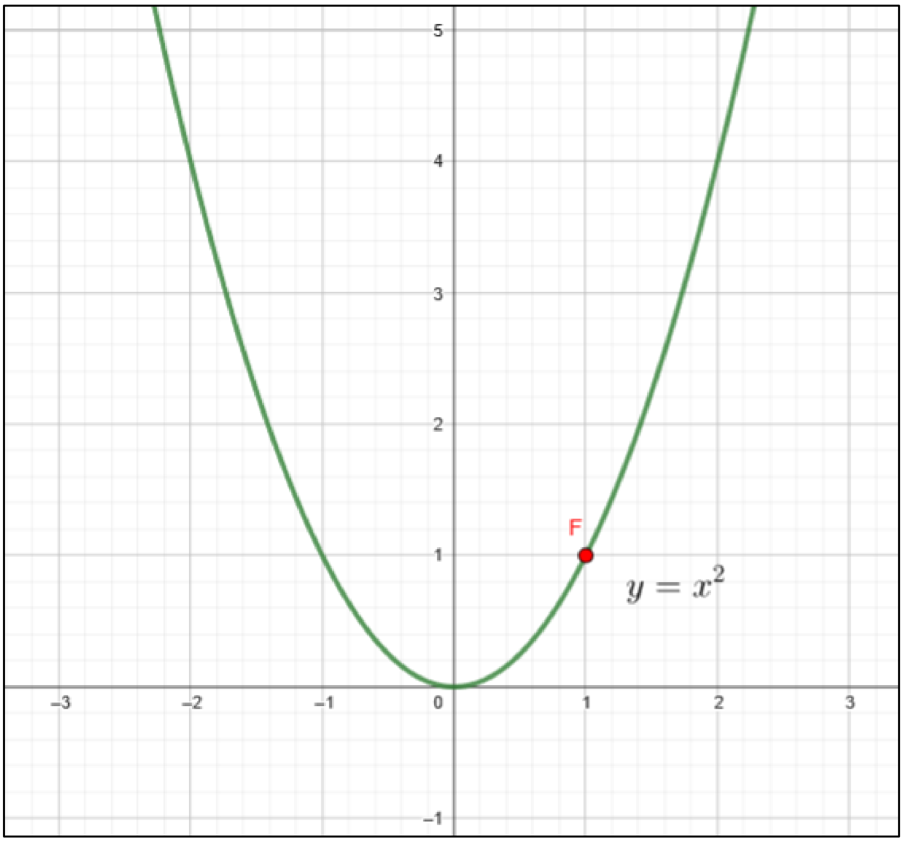
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Odpovedzte na otázky a zdôvodnite svoje tvrdenia:

a) Ktoré z čiar na obrázkoch predstavujú grafy funkcií?

b) Ktoré z čiar na obrázkoch sú grafmi funkcií prostých na celom svojom definičnom obore?

c) Ktoré funkcie na obrázkoch sú na celom definičnom obore rastúce a zároveň ohraničené zdola?

d) Na ktorom obrázku je graf funkcie, ktorá je ohraničená?

e) Na ktorom obrázku je graf funkcie, ktorá je párna?

f) Ktorá dvojica čiar predstavuje grafy navzájom inverzných funkcií?

g) Na ktorých obrázkoch sú znázornené grafy funkcií, ktoré majú aspoň jeden lokálny extrém?

h) Na ktorom obrázku je graf funkcie, ktorá je zložená?

2. úloha

Zvoľte si ľubovoľnú elementárnu goniometrickú funkciu. Vytvorte pre ňu tabuľku obsahujúcu dostatočný počet dvojíc [x; $f(x)$] na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a na tomto intervale načrtnite graf tejto funkcie. Potom:

a) Určte periódu funkcie.

b) Určte intervaly, na ktorých je funkcia rastúca.

Zdôvodnite svoje tvrdenia.

3. úloha

Uveďte príklad kvadratickej funkcie, ktorá má kladné funkčné hodnoty na celom svojom definičnom obore všetkých reálnych čísel, je párna a má lokálne minimum v bode $x = 0$ s funkčnou hodnotou $f(0) = 1$. Dokážte, že existuje priesečník grafu funkcie s priamkou $y = 5$. Načrtnite oba objekty v súradnicovej sústave do jedného obrázka a priesečník vyznačte.

4. úloha

Vytvorte zloženú funkciu $h(\mathrm{x}) = f(g(x))$, ak $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(\mathrm{x}) = 3x + 1$.

Určte:

a) definičný obor a obor hodnôt zloženej funkcie $h(\mathrm{x})$,

b) súradnice priesečníka grafu funkcie $g(x) = 3x + 1$ so súradnicovou osou x,

c) predpis inverznej funkcie k funkcii $g(x) = 3x + 1$ na prípustnom intervale.

Zdôvodnite svoje tvrdenia.

Načrtnite oba grafy do jedného obrázka a posúďte správnosť náčrtu z hľadiska vzájomnej súmernosti grafov.

5. úloha

Postupnosť je daná rekurentne pomocou vzťahu $a_{n+1} = 3n - a_n$, $a_{12} = 9$.

a) Vypočítajte hodnoty prvých 6 členov danej postupnosti.

b) Je postupnosť monotónna?

c) Je postupnosť ohraničená?

Zdôvodnite svoje tvrdenia.

2.5.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Počas roka sa mení spotreba zmrzliny v závislosti od teploty.

a) Ktorá premenná je v tomto prípade závislá a ktorá nezávislá?

b) Ktorá premenná je funkciou ktorej premennej?

c) Vyjadrite pomocou funkčnej závislosti, ako sa mení spotreba zmrzliny v závislosti od teploty, ak je pozorovaný lineárny rast. Ktorá premenná predstavuje argument danej funkcie?

d) Vyjadrite pomocou funkčnej závislosti kvadratický rast spotreby zmrzliny od teploty. Porovnajte funkčné hodnoty pri teplote 20 °C a 30 °C.

2. úloha

Osobné auto s palivovou nádržou s objemom 70 l má pri rýchlosti 90 km/h priemernú spotrebu 5 l/100 km. Ak auto začína cestu s plnou nádržou,

a) pomocou funkčnej závislosti vyjadrite, ako sa mení pri tejto rýchlosti množstvo paliva v nádrži v závislosti od času,

b) vypočítajte, koľko paliva zostane v nádrži po dvojhodinovej jazde stálou rýchlosťou 90 km/h,

c) vyjadrite, ako sa mení pri rýchlosti 90 km/h množstvo paliva v nádrži v závislosti od počtu prejdených km,

d) vypočítajte, koľko paliva zostane v nádrži po prejdení 130 km rýchlosťou 120 km/h, pričom spotreba vzrástla na 5,2 l/100 km,

e) vypočítajte vzdialenosť v km, ktorú auto prejde priemernou rýchlosťou 90 km/h od stavu, kedy je v nádrži polovičné množstvo paliva do okamihu, kedy sa mu rozsvieti signalizácia nízkeho stavu paliva (rezerva), čo zodpovedá posledným 5 litrom paliva v nádrži.

3. úloha

Napíšte predpis funkcie, ktorej graf je rovnobežný s grafom funkcie $y = x - 3$ a súradnicovú os x pretína v bode – 1.

a) Načrtnite graf vytvorenej funkcie.

b) V ktorom bode pretína graf funkcie os y?

c) Zostavte tabuľku pre výpočet piatich funkčných hodnôt v bodoch, ktoré si ľubovoľne zvolíte.

d) Pomenujte vzťah medzi grafmi funkcií $y = x$ a $y = x - 3$.

4. úloha

Pomocou vzťahu pre n-tý člen je daná číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{3}{2} \cdot 2^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

a) Napíšte prvých päť členov danej postupnosti.

b) Rozhodnite, či je postupnosť monotónna.

c) Určte, či je postupnosť ohraničená.

d) Nájdite rekurentný vzťah pre výpočet členov postupnosti.

e) O ktorý špecifický typ postupnosti ide?

5. úloha

Číselná postupnosť definovaná pomocou vyjadrenia n-tého člena $a_n = \frac{1}{n}$ je tzv. harmonická postupnosť.

a) Vypočítajte hodnoty prvých šiestich členov tejto postupnosti.

b) Je táto postupnosť ohraničená, je monotónna?

c) Porovnajte vyššie zistené vlastnosti s podobnými vlastnosťami postupností $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$.

2.6 Funkcie: Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

2.6.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojem lineárna funkcia a zapíšte jej vyjadrenie pomocou funkčného predpisu. Vysvetlite význam jednotlivých koeficientov v zápise lineárnej funkcie. Uveďte príklad priamej úmernosti z reálneho života.

2. úloha

Objasnite pojem smernica priamky. Uveďte príklad predpisu a grafu lineárnej funkcie, ktorá je klesajúca na celom svojom definičnom obore.

3. úloha

Vysvetlite pojem kvadratická funkcia a zapíšte jej vyjadrenie pomocou funkčného predpisu. Objasnite súvislosť typu globálneho extrému kvadratickej funkcie s koeficientom pri kvadratickom člene vo vyjadrení kvadratickej funkcie. Uveďte príklady.

4. úloha

Vysvetlite, ktorá krivka je grafom kvadratickej funkcie a charakterizujte jej vlastnosti z hľadiska súmernosti. Uveďte príklad.

5. úloha

Vysvetlite pojem aritmetická postupnosť. Objasnite súvislosť monotónnosti s diferenciou aritmetickej postupnosti na konkrétnom príklade.

2.6.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

V pravouhlej súradnicovej sústave (O, x, y) znázornite graf lineárnej funkcie g prechádzajúcej počiatkom súradnicovej sústavy O a bodom $A\,[3;\ 5]$.

Riešte zadania a zdôvodnite svoje riešenia:

a) Vyjadrite funkciu g v tvare $y = g(x)$.

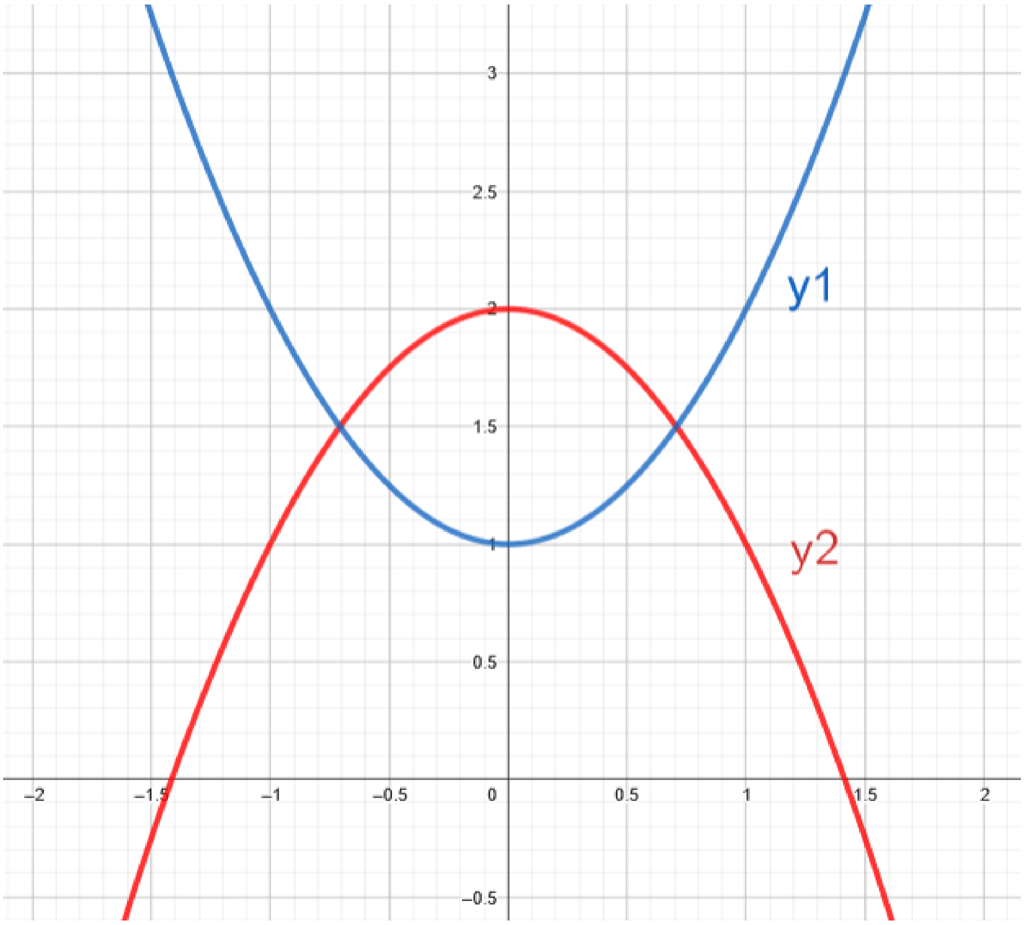
b) Určte definičný obor a obor hodnôt funkcie g.

c) Ako sa zmení predpis funkcie g, ak bude graf prechádzať bodmi $A\,[3;\ 5]$ a $B\,[0; 5]$?

d) Bude graf funkcie g prechádzať bodom $C\,[3;\ 0]$?

2. úloha

Na obrázku 7 sú v pravouhlej súradnicovej sústave v rovine znázornené grafy dvoch kvadratických funkcií y_1 a y_2.



Obr. 7

Riešte zadania vychádzajúc z obrázka 7, zdôvodnite svoje riešenia:

a) Bude diskriminant pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice $y_1 = 0$ a $y_2 = 0$ kladný alebo záporný?

b) Určte obor hodnôt a intervaly monotónnosti pre obe funkcie.

c) Určte predpis funkcií y_1, y_2.

d) Nájdite súradnice bodov, v ktorých sa grafy funkcií y_1 *a* y_2 navzájom pretínajú.

3. úloha

Oblúk mosta ponad rieku má tvar paraboly a začína a končí na úrovni hladiny rieky. Najvyšší bod mosta je nad hladinou rieky vo vzdialenosti 16 m a nad vozovkou 9 m. Vozovka vo vnútri oblúka je dlhá 60 m.

Načrtnite obrázok podľa popisu vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave a riešte zadania. Svoje riešenia zdôvodnite.

a) Určte súradnice vrcholu uvedenej paraboly.

b) Určte predpis funkcie, ktorej grafom je uvedená parabola.

c) Určte dĺžku rozpätia oblúka na hladine rieky.

4. úloha

Určte súradnice vrcholu paraboly, ktorá je grafom funkcie $y(x) = 3x^2 - 24x + 53$. Zdôvodnite svoje tvrdenie.

5. úloha

Určte hodnotu tretieho člena aritmetickej postupnosti, ak:

a) $a_{10} = 21$ a diferencia $d = 3$,

b) poznáte hodnotu dvoch rôznych členov postupnosti $a_5 = 30$ a $a_8 = 24$.

Zdôvodnite svoje tvrdenia.

6. úloha

Medzi čísla 2 a 20 vložte päť čísel tak, aby všetky spolu tvorili aritmetickú postupnosť.

Riešte zadania a zdôvodnite svoje riešenia:

a) Určte *n*-tý člen aritmetickej postupnosti vyjadrený pomocou diferencie *d*.

b) Vyjadrite rekurentný vzťah definujúci danú postupnosť.

c) Vypočítajte súčet prvých 10 členov aritmetickej postupnosti.

2.6.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Objem bazéna je 20 000 litrov vody. Pri napúšťaní doň pritečie 50 litrov vody za minútu.

a) Určte funkciu f_1, ktorá vyjadruje závislosť množstva vody v bazéne od času počas napúšťania bazéna, ak napĺňame prázdny bazén.

b) Určte funkciu f_2, ktorá vyjadruje závislosť množstva vody v bazéne od času, ak bol bazén pred začiatkom napúšťania naplnený na ¼ objemu.

c) Porovnajte časy potrebné na naplnenie celého objemu bazéna v oboch prípadoch. Využite aj grafy predtým definovaných funkcií.

d) Koľko minút by trvalo naplnenie bazéna v oboch prípadoch, ak by sa prítok zvýšil dvojnásobne?

e) Závisí čas naplnenia bazéna od jeho tvaru?

f) Závisí čas naplnenia bazéna do požadovanej výšky hladiny od tvaru jeho dna?

g) Závisí čas naplnenia bazéna do požadovanej výšky hladiny od veľkosti plochy jeho dna?

2. úloha

Lietadlo letí na trase z Reykjavíku do Viedne priemernou rýchlosťou v. Vzdušná vzdialenosť medzi oboma letiskami je 2 885 km.

a) Pomocou funkčnej závislosti vyjadrite vzdialenosť, ktorú má lietadlo v danom momente ešte preletieť, kým pristane v cieľovej destinácii, v závislosti od času.

b) Funkčné závislosti konkretizujte pre priemerné rýchlosti lietadla 600 km/h a 700 km/h. Načrtnite grafy oboch funkcií a porovnajte vzdialenosti.

c) Vypočítajte, koľko bude let trvať lietadlu pri uvedených rýchlostiach. Výsledok vyjadrite v hodinách a minútach.

d) Za koľko hodín by trasu zvládol holub letiaci priemernou rýchlosťou 70 km/h?

3. úloha

Daná je kvadratická funkcia $f(x) = 2 - (x - 3)^2$.

a) Vypočítajte priesečníky grafu funkcie $f(x)$ so súradnicovými osami x a y.

b) Identifikujte globálny extrém funkcie $f(x)$.

c) Načrtnite graf funkcie $f(x)$.

d) Vytvorte predpis pre funkciu $g(x)$, ktorej graf bude vzhľadom na graf funkcie $f(x)$ posunutý o 2 jednotky smerom nadol (v smere osi y) a načrtnite jej graf.

e) Vytvorte predpis pre funkciu $h(x)$, ktorej graf bude vzhľadom na graf funkcie $f(x)$ posunutý o 1 jednotku smerom doprava (v smere osi x) a načrtnite jej graf.

f) Porovnajte polohu vrcholov grafov funkcií $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$.

4. úloha

Dve kamarátky Jana a Beáta si požičali z knižnice rovnakú knižku, ktorá mala 280 strán. Knihu začali čítať v ten istý deň. Jana čítala rýchlejšie ako Beáta a denne prečítala 40 strán.

a) Koľko strán denne prečítala Beáta, ak jej trvalo prečítanie knihy 10 dní?

b) Vyjadrite v počte strán aj v percentách časť knihy, ktorú budú mať dievčatá prečítanú po piatich dňoch.

c) Koľko strán knihy zostalo ešte prečítať Beáte po týždni?

d) Koľko strán by po týždni čítania zostalo Jane, keby čítala iba každý druhý deň nezmenenou rýchlosťou a koľko dní by jej trvalo prečítanie celej knihy?

5. úloha

Vypočítajte a porovnajte hodnotu súčtu prvých 100 prirodzených čísel, prvých 100 párnych prirodzených čísel a prvých 100 nepárnych prirodzených čísel.

6. úloha

Súčin troch po sebe idúcich členov aritmetickej postupnosti je rovnaký ako ich súčet. Vypočítajte hodnoty týchto členov, ak diferencia aritmetickej postupnosti je $d = 1$.

2.7 Funkcie: Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

2.7.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojem polynóm (mnohočlen) a objasnite súvislosť stupňa polynómu s počtom a vlastnosťami jeho koreňov. Uveďte príklady.

2. úloha

Objasnite mocninovú funkciu. Vysvetlite, čo je exponent mocninovej funkcie a aký má vplyv na definičný obor, ohraničenosť, monotónnosť funkcie a párnosť, resp. nepárnosť funkcie.

3. úloha

Napíšte vzťahy pre úpravy výrazov s mocninami s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom.

4. úloha

Objasnite *n*-tú odmocninu pomocou zápisu mocniny s racionálnym exponentom. Uveďte príklady.

5. úloha

Vysvetlite pojem lineárna lomená funkcia a asymptoty grafu tejto funkcie. Objasnite súvislosť definičného oboru a oboru hodnôt lineárnej lomenej funkcie s asymptotami jej grafu. Uveďte príklad.

2.7.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Daná je funkcia *f*: $y = \frac{1}{x^2-2x+1} + 3$.

a) Načrtnite graf funkcie *f* a v obrázku vyznačte asymptoty grafu.

b) Určte definičný obor funkcie *f*. Svoje riešenie zdôvodnite.

c) Nájdite intervaly monotónnosti funkcie *f*. Svoje riešenie zdôvodnite.

2. úloha

Nájdite množinu riešení nerovnice $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Úlohu riešte graficky aj numericky. Svoje riešenie zdôvodnite.

3. úloha

Dané sú mocninové výrazy:

$4^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4^3}}$ $\quad \frac{2^3}{2^{-5}}\sqrt{8}$ $\quad \frac{2^{-1}}{2^8}\sqrt[3]{8}$ $\quad \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[5]{2}}}$ $\quad \frac{\left(\sqrt{8 \cdot \sqrt{2}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)^{-4}}$

Usporiadajte ich v poradí od najmenšieho po najväčší.

Úlohu riešte úpravami mocninových výrazov. Svoje riešenie zdôvodnite.

4. úloha

Nech *f*(*x*) je funkcia vyjadrená predpisom *f*: $y(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Načrtnite jej graf a riešte zadania. Svoje riešenia zdôvodnite:

a) Určte definičný obor funkcie a asymptoty jej grafu.

b) Určte intervaly monotónnosti funkcie.

c) Nájdite inverznú funkciu k funkcii *f*. Načrtnite graf inverznej funkcie k funkcii *f*.

5. úloha

Koľko reálnych koreňov má rovnica $x^2 - 4 = \frac{1}{x-2}$?

Úlohu riešte graficky. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.7.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Daná je rovnica $x^4 + 5x^3 + 6x^2 = 0$.

a) Koľko koreňov má daná rovnica v *Z* alebo v *N*?

b) Koľko existuje priesečníkov grafu polynomickej funkcie $y = x^4 + 5x^3 + 6x^2$ s osou *x*?

2. úloha

Rozložte polynóm $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ na súčin polynómov 1. stupňa, ak viete, že jeden jeho koreň má hodnotu 1. Vypočítajte hodnotu polynómu pre $x = 2$.

3. úloha

Funkcia f je určená predpisom f: $y(x) = \sqrt{x}$ a parameter $a = 3$.

a) Určte definičný obor a obor hodnôt funkcií $f(x)$, $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x - a)$.

b) Ovplyvňuje parameter a vlastnosť monotónnosti funkcií $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x - a)$ na celom definičnom obore?

c) Načrtnite grafy funkcií $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x - a)$ a opíšte, ako vytvoríme ich grafy z grafu funkcie f(x).

d) Ako sa nazýva krivka, ktorej časťou je graf funkcie $f(x)$?

4. úloha

Pri plnej 60-litrovej nádrži paliva má osobné auto pri konštantnej rýchlosti 90 km/h predpokladaný dojazd D = 1 200 km, ktorý klesá kvadraticky so zvyšujúcou sa rýchlosťou v. Predpokladajme, že dojazd je opísaný funkciou $D(v) = \boldsymbol{k}/v^2$, kde $v \in$ (60 km/h, 150 km/h).

a) Vypočítajte koeficient $\boldsymbol{k}$ vo vyjadrení funkčnej závislosti $D(v)$.

b) Určte v km dojazd auta pri jazde po diaľnici stálou rýchlosťou 130 km/h, ak pri štarte má plnú nádrž.

c) Polovičný objem nádrže znižuje dojazd na polovicu. Určte v km dojazd auta pri jazde po diaľnici stálou rýchlosťou 110 km/h, ak má pri štarte k dispozícii polovicu objemu nádrže.

5. úloha

Funkcia $f(x)$ je určená predpisom f: $y(x) = 1/x$ a parameter $a = 2$.

a) Zistite definičný obor a obor hodnôt funkcií $f(x)$, $-f(x)$, $f(x) + a$, $f(x + a)$.

b) Určte intervaly monotónnosti funkcie $y(x) = 1/x$.

c) Načrtnite grafy funkcií $-f(x)$, $f(x) + a$, $f(x + a)$ a opíšte, ako vytvoríme ich grafy z grafu funkcie f(x).

d) Využitím grafov posúďte párnosť/nepárnosť jednotlivých funkcií.

e) Nájdite rovnice asymptot grafu funkcie $f(x + a)$ a načrtnite ich do jedného obrázka spolu s grafom funkcie $f(x + a)$.

f) Nájdite rovnice asymptot grafu funkcie $f(x) + a$ a načrtnite ich do jedného obrázka spolu s grafom funkcie $f(x) + a$.

g) Pomenujte krivku, ktorá je grafom funkcie $y(x) = 1/x$.

2.8 Funkcie: Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

2.8.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojem exponenciálna funkcia. Na vhodne zvolených príkladoch graficky ilustrujte vplyv základu exponenciálnej funkcie $\boldsymbol{a}$ na vlastnosť monotónnosti. Do grafov funkcií znázornite význačné body [0; 1], [1; $\boldsymbol{a}$].

2. úloha

Vysvetlite pojem logaritmus a dekadický logaritmus. Objasnite vzťah prirodzeného logaritmu a čísla e. Na príkladoch uveďte výpočet hodnoty logaritmu.

3. úloha

Charakterizujte logaritmickú funkciu a jej vzťah k exponenciálnej funkcii. Na vhodne zvolenom príklade objasnite súvislosť monotónnosti logaritmickej funkcie a jej základu $\boldsymbol{a}$. Do grafov funkcií znázornite význačné body [1; 0], [$\boldsymbol{a}$; 1].

4. úloha

Vysvetlite pojmy geometrická postupnosť a kvocient geometrickej postupnosti.

Na konkrétnych príkladoch objasnite súvislosť kvocientu a prvého člena geometrickej postupnosti s jej monotónnosťou a ohraničením.

Zdôvodnite podmienku pre kvocient v prípade výpočtu súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti. Ako by sa počítal tento súčet, keby kvocient nespĺňal uvedenú podmienku?

5. úloha

Uveďte príklady z reálneho života, kde okolo nás sa vyskytujú situácie, ktoré je možné matematicky modelovať pomocou geometrickej postupnosti.

2.8.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Nájdite reálny (celočíselný, prirodzený) koreň rovnice $\frac{2^{x-6}}{2^{5-2x}} = \frac{\log_2 16}{\log_2 4}$.

Riešenie zdôvodnite a skontrolujte pomocou skúšky správnosti.

2. úloha

Nájdite interval, na ktorom funkcia $y = 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x - 2$ nadobúda záporné hodnoty.

Svoje riešenie zdôvodnite.

3. úloha

Nájdite reálny (celočíselný, prirodzený) koreň rovnice $\log(x+2) - \log(x-4) = 2 - \log 25$.

Svoje riešenie zdôvodnite.

4. úloha

Nájdite reálny koreň sústavy nerovníc $3 \leq 2\ln x + 3 \leq 5$.

Úlohu riešte výpočtom aj graficky. Svoje riešenie zdôvodnite.

5. úloha

Vyjadrite neznámu *x* zo vzťahov:

a) $\log_4(7x-2) = \mathrm{C}$,

b) $p + e^{x-1} = \frac{m-3}{2}$.

Zdôvodnite svoje riešenia.

6. úloha

Vypočítajte súčet prvých desiatich členov geometrickej postupnosti, ak $a_2 = 3$ a $a_4 = 48$.

Nájdite rekurentné vyjadrenie danej postupnosti. Zdôvodnite svoje riešenie.

2.8.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Funkcia $f(x)$ je určená predpisom f: $y(x) = 3^x$ a je daný parameter $b = 2$.

a) Zistite definičný obor a obor hodnôt funkcií $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + b$, $f(x+b)$.

b) Načrtnite grafy funkcií $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + b$, $f(x+b)$ a opíšte, ako vytvoríme ich grafy z grafu funkcie $f(x)$.

c) Určte, či sú funkcie $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + b$, $f(x+b)$ párne/nepárne/ani párne, ani nepárne.

d) Na vhodnom intervale vyjadrite inverznú funkciu k funkcii $f(x+b)$ a zobrazte graf inverznej funkcie. Načrtnite aj os súmernosti grafov oboch funkcií.

2. úloha

Funkcia $f(x)$ je určená predpisom f: $y(x) = \log_a x$ a je daný parameter $c = 3$.

a) Zistite definičný obor a obor hodnôt funkcií $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + c$, $f(x + c)$.

b) Načrtnite grafy funkcií $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + c$, $f(x + c)$ a opíšte, ako vytvoríme ich grafy z grafu funkcie $f(x)$.

c) Určte, či sú funkcie $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x) + c$, $f(x + c)$ párne/nepárne/ani párne, ani nepárne.

d) Na vhodnom intervale vyjadrite inverznú funkciu k funkcii $f(x + c)$ a zobrazte graf inverznej funkcie. Načrtnite aj os súmernosti grafov oboch funkcií.

3. úloha

Pri experimente s účinkom nového antibiotika bolo zistené, že po prvej dávke sa úplne zastavilo rozmnožovanie mikroorganizmov a každá ďalšia aplikovaná dávka z nich okamžite zničila polovicu. Experiment začal s počtom 160 000 baktérií.

a) Vypočítajte, koľko baktérií zostane po aplikovaní piatej dávky.

b) Po koľkej dávke zostalo v skúmanej vzorke presne 20 000 baktérií?

c) Zistite, koľko baktérii by bolo v pôvodnej vzorke po 3 minútach, ak by liek vôbec neúčinkoval.

   Vieme, že tento typ baktérií sa rozmnožuje tak, že ich počet N narastá v čase t (min) exponenciálne podľa vzťahu $N(t) = N_0 . 2^t$, kde N_0 je počet baktérií v čase $t = 0$.

4. úloha

Vypočítajte, za koľko rokov sa vklad v banke zdvojnásobí pri ročnej percentuálnej úrokovej miere 1,2 %.

5. úloha

Pokles atmosférického tlaku p (v Pascaloch) v závislosti od nadmorskej výšky h (v metroch) približne vyjadruje funkcia $\log p = 5 - \frac{h}{15\,500}$.

a) Vypočítajte nadmorskú výšku (v metroch), v ktorej je tlak 10-krát menší ako pri hladine mora.

b) Určte (v Pascaloch) atmosférický tlak na vrchole Gerlachovský štít, ak má výšku 2 655 m n. m.

c) Určte (v Pascaloch) atmosférický tlak na vrchole Mont Blanc vo výške 4 809 m n. m.

d) Určte (v Pascaloch) atmosférický tlak na vrchole Mont Everest s výškou 8 848 m n. m.

6. úloha

Medzi čísla 16 a 81 vložte tri čísla tak, aby všetky spolu tvorili päť za sebou idúcich členov geometrickej postupnosti.

a) Vyjadrite *n*-tý člen geometrickej postupnosti pomocou jej prvého člena a kvocientu q.

b) Určte siedmy člen tejto postupnosti.

c) Rozhodnite o monotónnosti postupnosti.

2.9 Funkcie: Goniometrické funkcie

2.9.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojem goniometrická funkcia. Objasnite súvislosť medzi definíciou funkcie *sin x*, *cos x*, jednotkovou kružnicou a číslom π. Vysvetlite najmenšiu periódu jednotlivých funkcií v stupňovej aj v oblúkovej miere. Pomocou jednotkovej kružnice a Pytagorovej vety odvoďte vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. úloha

Vysvetlite uhol základnej veľkosti a na príklade objasnite zmysel jeho zavedenia. Objasnite znamienko funkčnej hodnoty pre funkcie sin *x*, cos *x* v závislosti od argumentu *x* funkcie v jednotlivých kvadrantoch v súradnicovej rovine (O, *x*, *y*).

3. úloha

Určte definičný obor a obor hodnôt jednotlivých goniometrických funkcií. Matematicky vyjadrite vzťah medzi funkciami sin *x* a cos *x* a funkciami tg *x* a cotg *x*.

4. úloha

Určte intervaly monotónnosti a lokálne extrémy goniometrických funkcií.

5. úloha

Objasnite vlastnosť párnosti alebo nepárnosti pre každú zo základných goniometrických funkcií. Osovú alebo stredovú súmernosť prítomnú v grafoch ilustrujte na príkladoch.

2.9.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Daná je funkcia $y = \cos 2x$. Riešte zadania, zdôvodnite svoje riešenia.

a) Načrtnite graf danej funkcie na intervale $\langle -\pi; \pi \rangle$ a určte jej periódu.
b) Určte funkčnú hodnotu tejto funkcie v bode $x = -\pi/4$.
   Vyznačte príslušný bod $[x; f(x)]$ na grafe funkcie.
c) Je daná funkcia párna alebo nepárna? Posúďte na základe súmernosti grafu danej funkcie.

2. úloha

Určte definičný obor funkcie $y = 5\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Svoje riešenie zdôvodnite.

3. úloha

Určte súradnice priesečníkov grafu funkcie $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ so súradnicovou osou x na intervale $\langle 0; 3\pi \rangle$. Svoje riešenie zdôvodnite. Načrtnite graf danej funkcie aj nájdené priesečníky.

4. úloha

Určte lokálne maximá funkcie $y = 2\sin 2x + 1$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

5. úloha

Nájdite všetky reálne korene rovnice $2\sin x + \mathrm{tg}\, x = 0$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.9.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Určte v stupňovej aj v oblúkovej miere veľkosť najmenšieho uhla tvoreného veľkou a malou ručičkou na ciferníku hodín, ak hodinky ukazujú čas:

a) 18:00,

b) 3:00,

c) 21:00,

d) 2:00,

e) 7:00.

2. úloha

Dané sú tri funkcie: $f(x) = \sin x$, $a(x) = \sin 2x$, $b(x) = 2\sin x$.

a) V spoločnej súradnicovej sústave znázornite grafy daných funkcií a porovnajte ich obor hodnôt.

b) Ako sa zmení perióda funkcie $a(x) = \sin 2x$ vzhľadom na periódu funkcie $f(x) = \sin x$?

c) Ako sa zmení perióda funkcie $y = 1 + 2\sin 2x$ vzhľadom na periódu funkcie $a(x) = \sin 2x$?

3. úloha

Načrtnite graf funkcie $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) Na uvedenom intervale určte intervaly monotónnosti funkcie.

b) Na uvedenom intervale určte globálne minimá funkcie.

c) Nájdite všetky lokálne maximá funkcie.

4. úloha

Na základe náčrtu grafov funkcií sin *x* a cos *x* na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ určte:

a) v ktorých bodoch sa na uvedenom intervale budú grafy funkcií pretínať nad súradnicovou osou *x*,

b) pre ktoré intervaly premennej *x* budú mať funkcie sin *x* a cos *x* funkčné hodnoty s rovnakými znamienkami,

c) pre ktoré intervaly premennej *x* budú nadobúdať funkcie sin *x* a tg *x* funkčné hodnoty s rôznymi znamienkami.

2.10 Planimetria: Základné rovinné útvary

2.10.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojmy týkajúce sa lineárnych útvarov: bod, priamka, polpriamka, úsečka, polrovina. Charakterizujte možnosti vzájomnej polohy dvoch priamok v rovine. Vysvetlite pojem vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Objasnite pojmy týkajúce sa lineárnych útvarov: uhol (ostrý, pravý, priamy, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os uhla, uhol dvoch priamok. Uveďte ich príklady a sformulujte súvislosti medzi uvedenými pojmami.

3. úloha

Vysvetlite pojmy týkajúce sa kružnice a kruhu: stred, polomer, priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica kružnice, stredový a obvodový uhol, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

4. úloha

Objasnite pojmy týkajúce sa trojuholníka: ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník, vrchol, strana, výška, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

5. úloha

Vysvetlite pojmy týkajúce sa štvoruholníkov: konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, obsah rovnobežníka a lichobežníka. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2.10.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Odvoďte Pytagorovu vetu a Euklidove vety.

2. úloha

Odvoďte Tálesovu vetu.

3. úloha

Zdôvodnite, kedy je vhodné použiť sínusovú a kedy kosínusovú vetu pri riešení trojuholníka.

4. úloha

Zdôvodnite tvrdenie o vzťahu medzi veľkosťou stredového a obvodového uhla.

5. úloha

Zdôvodnite tvrdenia o delení ťažníc ťažiskom, o strede kružnice vpísanej do trojuholníka, resp. opísanej trojuholníku.

2.10.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

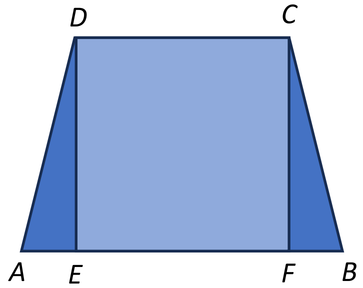
Vypočítajte obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky:

a) 6 cm,

b) *a* cm.

2. úloha

Na obrázku 8 je daný rovnoramenný lichobežník *ABCD* so základňami *AB* a *CD*, pričom obsah štvorca *EFCD* je 16 cm^2 a rameno lichobežníka má dĺžku 5 cm:



Obr. 8

Vypočítajte obsah lichobežníka *ABCD* a veľkosť jeho vnútorných uhlov.

3. úloha

Štvrťkruh má obsah 4π cm^2. Vypočítajte obvod celého kruhu v cm.

4. úloha

Vypočítajte obvod (v cm) a obsah (v cm^2) pravidelného desaťuholníka vpísaného do kružnice s polomerom 6 cm.

5. úloha

Obdĺžnik *ABCD* má dĺžky strán $|AB| = a, |BC| = \frac{1}{2}a$. Pätu kolmice vedenej z bodu *B* k uhlopriečke *AC* označme *E*. Určte pomer $|CE|:|AE|$.

2.11 Planimetria: Analytická geometria v rovine

2.11.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: (karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Objasnite pojmy: všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

3. úloha

Objasnite pojmy: parametrické rovnice priamky, smerový a normálový vektor priamky. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

4. úloha

Vysvetlite pojmy: vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, vektor opačný k danému vektoru, nulový vektor. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

5. úloha

Objasnite pojmy: súčet a rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora číslom, dĺžka vektora, skalárny súčin vektorov. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2.11.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite vzťah pre výpočet vzdialenosti dvoch bodov, ak poznáte ich súradnice.

Riešte analyticky pre body $A\,[-3;\,7]$, $B\,[4;\,-6]$ a danú situáciu znázornite.

2. úloha

Zdôvodnite súvis medzi kosínusom uhla dvoch vektorov a ich skalárnym súčinom.

Riešte analyticky pre dva konkrétne vektory, ak poznáte ich súradnice a danú situáciu znázornite.

3. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi smernicami dvoch:

a) rovnobežných priamok,

b) kolmých priamok.

Riešte analyticky pre dve konkrétne priamky a danú situáciu znázornite.

4. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch:

a) rovnobežných priamok,

b) kolmých priamok.

Riešte analyticky pre dve konkrétne priamky a danú situáciu znázornite.

5. úloha

Zdôvodnite vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky. Riešte analyticky pre priamku p: $3x - 4y - 2 = 0$ a danú situáciu znázornite.

2.11.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Napíšte analytické vyjadrenie (všeobecnú rovnicu alebo rovnicu v smernicovom tvare) priamky p, ktorá prechádza:

a) bodmi $A\ [-1; 4]$ a $B\ [3; -5]$,

b) bodom $A\ [-2; 3]$ rovnobežne s priamkou q: $y = 3x - 5$,

c) bodom $A\ [-2; 3]$ kolmo na priamku q: $y = 3x - 5$.

2. úloha

Vypočítajte:

a) vzdialenosť bodov $A\ [2; -4]$ a $B\ [-4; 3]$,

b) vzdialenosť bodu $C\ [-3; 1]$ od priamky p: $y = -4x + 2$.

3. úloha

Vypočítajte:

a) vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok p: $y = -x$ a q: $y = -x - 4$,

b) veľkosť uhla dvoch priamok p: $y = -3x + 1$ a q: $y = 5x - 4$.

4. úloha

Dané sú súradnice vrcholov trojuholníka KLM: $K\ [3; -3]$, $L\ [5; 4]$, $M\ [-3; 2]$. Vypočítajte:

a) obvod trojuholníka KLM,

b) obsah trojuholníka KLM.

5. úloha

Napíšte rovnicu kružnice k:

a) ak má stred S [– 4; 3] a polomer $r = 5$ cm,

b) v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak kružnica k prechádza bodmi A [– 3; 0], B [0; 4], C [6; 0].

6. úloha

Na súradnicovej osi x určte bod C tak, aby bol rovnako vzdialený od bodov A [5; – 6], B [– 3; 6].

Danú situáciu znázornite.

2.12 Planimetria: Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

2.12.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Geometricky opíšte a načrtnite množinu bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch daných bodov.

2. úloha

Geometricky opíšte a načrtnite množinu bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch daných rovnobežných priamok.

3. úloha

Geometricky opíšte a načrtnite množinu bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch daných rôznobežných priamok.

4. úloha

Geometricky opíšte a načrtnite množinu bodov, ktoré majú od daného bodu vzdialenosť menšiu ako dané kladné číslo.

5. úloha

Geometricky opíšte a načrtnite množinu bodov, ktoré majú od danej priamky vzdialenosť väčšiu ako dané kladné číslo.

2.12.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite, prečo množina bodov, z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom, má uvedenú podobu. Danú situáciu znázornite.

2. úloha

Zdôvodnite, prečo množina bodov, ktoré majú od daného bodu vzdialenosť väčšiu ako dané kladné číslo, má uvedenú podobu. Danú situáciu znázornite.

3. úloha

Vysvetlite, ako z rovnice v stredovom tvare dostaneme všeobecnú rovnicu kružnice a kruhu, resp. ako zo všeobecnej rovnice kružnice a kruhu dostaneme rovnicu v stredovom tvare. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

4. úloha

Zdôvodnite, prečo množina bodov, ktoré majú od jedného daného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého daného bodu, má uvedenú podobu. Danú situáciu znázornite.

5. úloha

Zdôvodnite, prečo množina bodov, ktoré majú od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky, má uvedenú podobu. Danú situáciu znázornite.

2.12.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Daný je bod *A*. Geometricky opíšte, načrtnite a nájdite vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave analytické vyjadrenie množiny bodov, ktoré majú od bodu *A* vzdialenosť menšiu, resp. väčšiu ako dané kladné číslo.

2. úloha

Daná je priamka *p*. Geometricky opíšte, načrtnite a nájdite vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave analytické vyjadrenie množiny bodov, ktoré majú od priamky *p* vzdialenosť menšiu, resp. väčšiu ako dané kladné číslo.

3. úloha

Daná je kružnica *k*. Geometricky opíšte, načrtnite a nájdite vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave analytické vyjadrenie množiny bodov, ktoré majú od kružnice *k* vzdialenosť menšiu, resp. väčšiu ako dané kladné číslo.

4. úloha

Znázornite množinu bodov $[x; y]$, pre ktoré platí $y \leq x^3$, resp. $y \geq x^3$.

5. úloha

Znázornite množinu bodov $[x; y]$, pre ktoré platí $y > 3^x$, resp. $y < 3^x$.

2.13 Planimetria: Zhodné a podobné zobrazenia

2.13.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, osovo súmerný útvar, samodružný bod. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Objasnite pojmy: zhodné zobrazenie, stredová súmernosť, stred súmernosti, stredovo súmerný útvar, samodružný bod. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

3. úloha

Objasnite pojmy: zhodné zobrazenie, posunutie, samodružný bod. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

4. úloha

Vysvetlite pojmy: zhodné zobrazenie, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, samodružný bod. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

5. úloha

Objasnite pojmy: podobné zobrazenie, pomer podobnosti, rovnoľahlosť, stred a koeficient rovnoľahlosti. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2.13.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite existenciu dvoch stredov rovnoľahlostí pre dve rovnobežné a rôzne veľké úsečky KL, MN.

2. úloha

Daný je štvorec $EFGH$. Body K, L, M a N ležia v poradí na stranách EF, FG, GH a HE tak, že $KM \perp LN$. Dokážte, že $|KM| = |LN|$.

3. úloha

Daná je kružnica $k(S, r = 3 \text{ cm})$ a bod A, pričom $|SA| = 8$ cm. Zostrojte kružnicu k', ktorá by bola obrazom danej kružnice k v rovnoľahlosti podľa bodu A s koeficientami:

a) 2,

b) – 2,

c) $\frac{1}{2}$,

d) $-\frac{1}{2}$.

Svoje riešenia zdôvodnite.

4. úloha

Odvoďte vlastnosti vnútorných uhlov a uhlopriečok rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho súmernosti podľa osi S_1S_2, kde S_1, S_2 sú stredy jeho základní.

2.13.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Dané sú dve kružnice k_1, k_2 a priamka b. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky EFG, ktorých ťažnica na stranu g je časťou priamky b a vrcholy E, F ležia postupne na kružniciach k_1, k_2. Určte počet riešení úlohy.

2. úloha

Dané sú dve rovnobežné priamky c, d a mimo nich bod M. Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM tak, aby $K \in c$, $L \in d$. Určte počet riešení úlohy.

3. úloha

Dané sú dve rôznobežné priamky m, n a bod P, ktorý na nich neleží. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodom P a dotýkajú sa priamok m, n. Určte počet riešení úlohy.

4. úloha

Zostrojte stredy rovnoľahlosti kružníc $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, kde $S_1\,[-1;\ 2]$, $r_1 = 4$ cm, $S_2\,[6;\ -2]$, $r_2 = 2$ cm.

5. úloha

Napíšte rovnicu kružnice k', ktorá je obrazom kružnice k so stredom $S\ [-2; 3]$ a polomerom $r = 4$ cm v súmernosti podľa:

a) začiatku súradnicovej sústavy,

b) súradnicovej osi x,

c) súradnicovej osi y.

2.14 Planimetria: Konštrukčné úlohy

2.14.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojmy: rozbor, náčrt. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Vysvetlite pojmy: konštrukcia, postup konštrukcie. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2.14.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite postup konštrukcie, t. j. urobte rozbor jednoduchej konštrukčnej úlohy:

Daná je úsečka LS, $|LS| = 6$ cm. Zostrojte všetky trojuholníky KLM, ktoré majú ťažnicu LS a $|MK| = 4$ cm, veľkosť uhla pri vrchole K je 45°.

2. úloha

Zdôvodnite postup konštrukcie, t. j. urobte rozbor jednoduchej konštrukčnej úlohy:

Daná je priamka d a dva body B, C, z ktorých bod C leží na priamke d. Zostrojte kružnicu k tak, aby sa dotýkala priamky d v bode C a prechádzala bodom B.

3. úloha

Zdôvodnite postup konštrukcie, t. j. urobte rozbor jednoduchej konštrukčnej úlohy:

Dané sú dve rôznobežky a, b a bod $C \in a$. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky a v bode C a zároveň priamky b.

4. úloha

Zdôvodnite postup konštrukcie, t. j. urobte rozbor jednoduchej konštrukčnej úlohy:

Daný je kosoštvorec $ABCD$. Zostrojte taký bod X, aby z neho bolo vidieť stranu AB pod uhlom 65° a stranu BC pod uhlom 50°.

5. úloha

Zdôvodnite postup konštrukcie, t. j. urobte rozbor jednoduchej konštrukčnej úlohy:

Zostrojte trojuholník EFG, ak je dané $e + f$, g, veľkosť uhla pri vrchole E.

2.14.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Dané sú tri zhodné kružnice k_1, k_2, k_3 s polomerom 2 cm, ktoré sa navzájom dotýkajú zvonka. Zostrojte kružnicu k tak, aby sa dotýkala všetkých troch kružníc k_1, k_2, k_3.

2. úloha

Daná je úsečka AB, $|AB| = 5$ cm. Zostrojte všetky trojuholníky ABC, ktoré majú $t_c = 5$ cm, $r = 4$ cm, kde t_c je ťažnica na stranu c, r je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC.

3. úloha

Zostrojte kružnicu k, ktorá sa dotýka troch daných priamok a, b, c, pre ktoré platí:

a) všetky sú navzájom rôznobežné,

b) dve sú navzájom rovnobežné a tretia je s nimi rôznobežná,

c) všetky sú navzájom rovnobežné.

4. úloha

Zostrojte trojuholník RST, ak je daný obvod trojuholníka $r + s + t$ a vnútorné uhly pri vrcholoch R a S.

5. úloha

Zostrojte kružnicu k, ktorá sa dotýka danej kružnice k_1 so stredom S a polomerom $r = |ST|$ v danom bode T a danej priamky p.

2.15 Stereometria: Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

2.15.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: voľné rovnobežné premietanie, priemet bodu, priestorového útvaru do roviny. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní načrtnite obraz pravidelného *n*-bokého ihlana a vysvetlite na ňom vlastnosti voľného rovnobežného premietania.

3. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní načrtnite obraz pravidelného *n*-bokého hranola a vysvetlite na ňom vlastnosti voľného rovnobežného premietania.

2.15.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Zdôvodnite, kedy je obrazom kružnice vo voľnom rovnobežnom premietaní kružnica a kedy elipsa. Ilustrujte na obrázku.

2. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daný obraz (nadhľad sprava) kocky s hranou dĺžky 5 cm. Zobrazte kružnice vpísané do prednej, bočnej a hornej steny kocky. Svoje zobrazenia zdôvodnite.

3. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte pravidelný šesťuholník *ABCDEF*, ktorý leží v rovine kolmej na priemetňu. Strana *AB* je dlhá 4 cm a je rovnobežná s priemetňou. Svoje zobrazenie zdôvodnite.

2.15.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Použitím vlastností voľného rovnobežného premietania zobrazte pravidelný štvorboký hranol s výškou 6 cm a s podstavou, ktorej strana má dĺžku 5 cm.

2. úloha

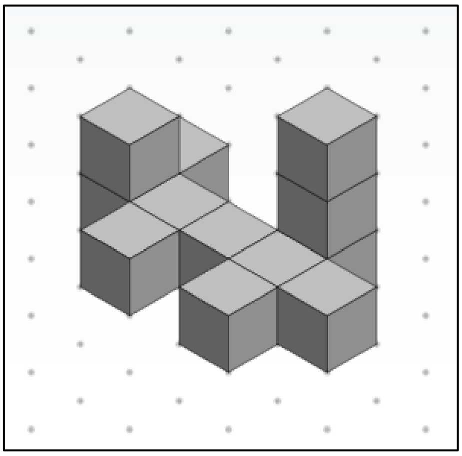
Použitím vlastností voľného rovnobežného premietania zobrazte pravidelný štvorboký ihlan s výškou 6 cm a s podstavou, ktorej strana má dĺžku 5 cm.

3. úloha

Použitím vlastností voľného rovnobežného premietania zobrazte pravidelný šesťboký hranol (ihlan) s výškou 6 cm a podstavnou hranou dlhou 4 cm.

4. úloha

Nakreslite bokorys, pôdorys a nárys útvaru zloženého z kociek na obrázku 9.



Obr. 9

2.16 Stereometria: Súradnicová sústava v priestore

2.16.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: (karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod v priestore a jeho súradnice, vzdialenosť bodov v priestore. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave načrtnite kváder s dĺžkami hrán a, b, c. Vyznačte v ňom ľubovoľnú telesovú uhlopriečku, ktorej krajné body označte A, B. Objasnite pojem vzdialenosť bodov A, B pomocou ich súradníc.

3. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave načrtnite kváder s dĺžkami hrán a, b, c. Vyznačte v ňom ľubovoľnú stenovú uhlopriečku, ktorej krajné body označte C, D. Objasnite pojem súradnice stredu uhlopriečky CD pomocou súradníc bodov C, D.

2.16.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Vyjadrite vzdialenosť dvoch bodov pomocou ich súradníc. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešte analyticky pre body $A\,[-3; 7; 2]$, $B\,[4; -6; 1]$ a danú situáciu znázornite.

2. úloha

Vyjadrite súradnice stredu úsečky pomocou súradníc jej krajných bodov. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Vypočítajte súradnice stredu úsečky AB, ak $A\,[-4; 8; 3]$, $B\,[4; -6; 1]$ a danú situáciu znázornite.

3. úloha

Určte súradnice bodu, ktorý delí úsečku KL v pomere 3 : 1, pričom $K\,[2; -1; -2]$, $L\,[4; -3; 3]$. Svoje tvrdenie zdôvodnite. Danú situáciu znázornite.

2.16.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave načrtnite kváder *ABCDEFGH*, o ktorom viete, že:

- bod *A* je začiatkom súradnicovej sústavy,
- $|AB| = 7$,
- $|AD| = 5$,
- $|AE| = 3$,
- záporná poloos *x* prechádza bodom *D*,
- kladná poloos *y* prechádza bodom *B*,
- kladná poloos *z* prechádza bodom *E*.

Určte súradnice vrcholov daného kvádra *ABCDEFGH*.

2. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave znázornite body *O* [1; – 3; – 5], *P* [– 1; 2; 4] a určte súradnice stredu úsečky *OP*.

3. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave načrtnite kváder *ABCDEFGH*, o ktorom viete, že:

- bod *F* je začiatkom súradnicovej sústavy,
- *E* [0; – 8; 0],
- *B* [0; 0; – 6],
- *G* [– 4; 0; 0].

Určte súradnice bodu *X*, ktorý delí úsečku *BF* v pomere 2 : 4.

4. úloha

V kvádri je zavedená sústava súradníc tak, že *D* [0; 0; 0], *A* [3; 0; 0], *C* [0; 4; 0], *H* [0; 0; 6]. Určte súradnice stredu steny *ABFE* daného kvádra.

5. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave znázornite body *M* [– 2; 4; – 3], *N* [1; – 3; 5] a vypočítajte ich vzdialenosť.

6. úloha

Vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave v priestore zostrojte obrazy bodov, ak poznáte ich súradnice: *A* [2; 1; 5], *B* [– 3; 3; – 1], *C* [2; – 1; – 4], *D* [0; – 6; 2], *E* [– 2; – 3; 0], *F* [– 2; – 3;– 7].

7. úloha

Určte súradnice vrcholov kvádra s rozmermi $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, ktorý má jeden vrchol v začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy, tri steny v súradnicových rovinách a súradnice vrcholov sú nezáporné.

2.17 Stereometria: Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

2.17.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojmy: bod, priamka a rovina v priestore. Uveďte ich príklady pomocou znázornenia vo voľnom rovnobežnom premietaní.

2. úloha

Opíšte možnosti vzájomnej polohy dvoch priamok v priestore a uveďte ich príklady na modeli kocky (alebo kvádra).

3. úloha

Opíšte možnosti vzájomnej polohy priamky a roviny. Uveďte ich príklady, pričom využite priamky a roviny v kocke (alebo kvádri).

4. úloha

Opíšte možnosti vzájomnej polohy dvoch rovín a ilustrujte ich na príkladoch rovín v kocke (alebo kvádri).

5. úloha

Objasnite pojem priesečnica dvoch rovín a jeho súvislosť s pojmom rez telesa rovinou. Vysvetlite, aký útvar vytvára rez telesa rovinou.

2.17.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Porovnajte možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov v priestore. Svoje tvrdenie zdôvodnite a ilustrujte na príkladoch priamok a rovín v kocke (alebo kvádri).

2. úloha

Vysvetlite, akým spôsobom možno rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch priamok na základe ich analytického vyjadrenia. Zdôvodnite základný rozdiel v existencii rôznych možností vzájomných polôh dvoch priamok v rovine a v priestore.

3. úloha

Pomocou zobrazenia priamky a roviny vo voľnom rovnobežnom premietaní objasnite možnosti vzájomnej polohy týchto útvarov. Ako rovinu si zvoľte jednu zo súradnicových rovín.

4. úloha

Zdôvodnite na základe zobrazenia kvádra vo voľnom rovnobežnom premietaní, aká je vzájomná poloha rovín, v ktorých ležia steny tohto kvádra.

5. úloha

Na kocke zobrazenej vo voľnom rovnobežnom premietaní znázornite všetky priamky, ktoré sú priesečnicami dvoch navzájom rôznobežných rovín obsahujúcich steny kocky. Zdôvodnite súvislosť rovnobežnosti priamok v prípade priesečníc roviny s dvoma rovnobežnými rovinami.

2.17.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Zobrazte kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní a znázornite na nej priamky, ktoré prechádzajú vrcholmi kocky tak, aby to boli dvojice navzájom:

a) rovnobežných priamok,

b) rôznobežných priamok,

c) mimobežných priamok.

V každej z častí a), b), c) uveďte niekoľko príkladov.

2. úloha

Zobrazte kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní a znázornite na nej časti rovín, ktoré prechádzajú jej vrcholmi tak, aby to boli dvojice navzájom

a) rovnobežných rovín,

b) rôznobežných rovín.

V každej z častí a), b) uveďte niekoľko príkladov.

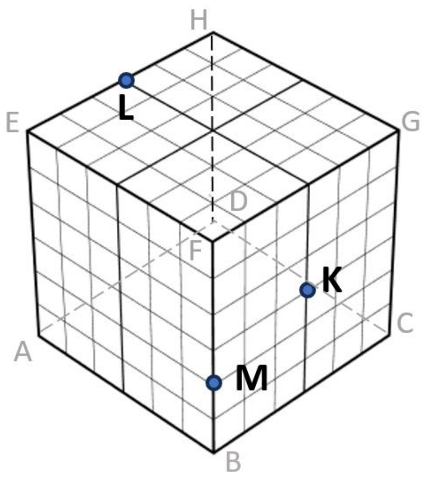
3. úloha

Zostrojte vo voľnom rovnobežnom priemete kocky *ABCDEFGH* (obrázok 10) priesečník priamky s rovinou steny danej kocky, ak rovina je určená bodmi *A*, *B*, *C* a priamka prechádza bodmi

a) *K*, *M*,

b) *K*, *L*,

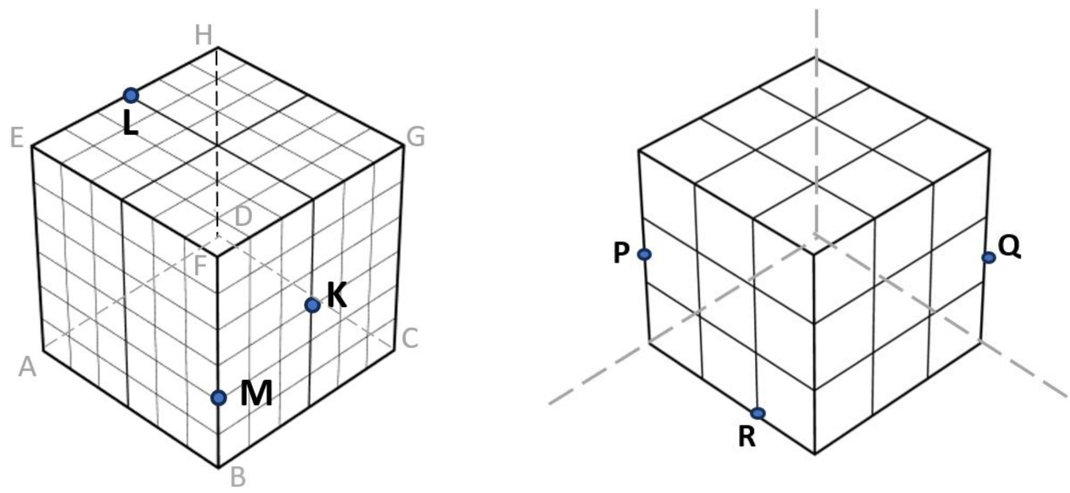
c) *L*, *M*.



Obr. 10

4. úloha

Zostrojte rovinný rez kockou, ak rovina rezu je určená bodmi *K*, *L*, *M* (obrázok 11a) a bodmi *P*, *Q*, *R* (obrázok 11b).

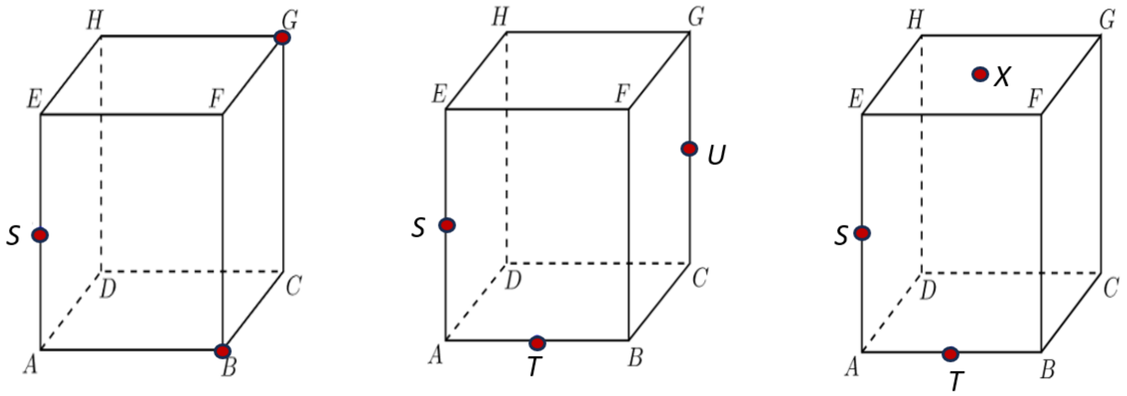


a b

Obr. 11

5. úloha

Zostrojte rovinné rezy kvádra *ABCDEFGH* rovinami určenými bodmi *S*, *B*, *G* (obrázok 12a), bodmi *S*, *T*, *U* (obrázok 12b) a bodmi *S*, *T*, *X* (obrázok 12c). Body *S*, *T* a *U* ležia v strede hrán a bod *X* v strede steny kvádra.



a **b** **c**

Obr. 12

2.18 Stereometria: Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

2.18.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy uhol dvoch priamok, uhol dvoch rovín, uhol priamky s rovinou. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Vysvetlite pojmy kolmosť priamok a rovín, priamka kolmá k rovine. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

3. úloha

Objasnite pojmy vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od priamky. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

4. úloha

Objasnite pojmy: vzdialenosť rovnobežných priamok, vzdialenosť rovnobežných rovín. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

5. úloha

Vysvetlite pojmy: kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť priamky a roviny s ňou rovnobežnej. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2.18.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Dokážte, že vzdialenosť bodu *B* od roviny *ACF* je tretina dĺžky telesovej uhlopriečky danej kocky.

2. úloha

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Dokážte, že uhol priamok *AH* a *BE* je 60°.

3. úloha

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Dokážte, že uhol priamok *AD* a *AH* je 45°.

4. úloha

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Dokážte, že priamky *AE* a *EG* sú na seba kolmé.

5. úloha

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Dokážte, že priamka *AE* a rovina *EFG* sú na seba kolmé.

2.18.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Zostrojte úsečku, ktorá vyjadruje vzdialenosť bodu *E* od priamky *BG*.

2. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Zostrojte úsečku, ktorá vyjadruje vzdialenosť bodu *D* od priamky *EF*.

3. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Zostrojte úsečku, ktorá vyjadruje vzdialenosť priamky *AD* od priamky *FG*.

4. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Zostrojte úsečku, ktorá vyjadruje vzdialenosť priamky *AD* od roviny *BCG*.

5. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Zostrojte úsečku, ktorá vyjadruje vzdialenosť priamky *AD* od roviny *BCE*.

6. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kocka *ABCDEFGH* so stranou a = 6 cm. Bod *X* je vnútorný bod hrany *AB*. Narysujte v skutočnej veľkosti uhol priamok *XH* a *XG*.

7. úloha

Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daný pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, v ktorom $|AB|$ = 6 cm, $|AV|$ = 6 cm. Narysujte v skutočnej veľkosti uhol roviny podstavy a roviny bočnej steny *BCV* ihlana.

2.19 Stereometria: Telesá

2.19.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojmy: teleso, mnohosten, rovnobežnosten, vrchol, hrana, stena. Sformulujte súvislosti medzi nimi a uveďte ich príklady.

2. úloha

Objasnite pojmy: kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder. Sformulujte súvislosti medzi nimi. Načrtnite aspoň tri rôzne siete kocky a kvádra.

3. úloha

Vysvetlite pojmy: štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava a výšky v štvorstene. Sformulujte súvislosti medzi nimi.

4. úloha

Objasnite pojmy: ihlan, guľa, valec, kužeľ. Sformulujte vlastnosti daných telies.

5. úloha

Vysvetlite súvislosť rezu guľou a uhlov s geografickým súradnicovým systémom poludníkov a rovnobežiek.

2.19.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Odvoďte vzťah na výpočet dĺžky hrany kocky, ak poznáte jej:

a) objem,

b) povrch.

Ilustrujte na obrázku.

2. úloha

Pre pravidelný kolmý šesťboký hranol s podstavnou hranou dĺžky *a* a výškou *v* odvoďte vzťah na výpočet jeho:

a) objemu,

b) povrchu. Ilustrujte na obrázku.

3. úloha

Pre pravidelný štvorboký ihlan s podstavnou hranou dĺžky a a výškou v odvoďte vzťah na výpočet jeho:

a) objemu,

b) povrchu.

Ilustrujte na obrázku.

4. úloha

Odvoďte vzťah na výpočet výšky valca (alebo polomeru podstavy valca), ak poznáte polomer jeho podstavy (alebo jeho výšku) a jeho:

a) objem,

b) povrch.

Ilustrujte na obrázku.

5. úloha

Odvoďte vzťah na výpočet strany kužeľa, ak poznáte polomer jeho podstavy a jeho:

a) objem,

b) povrch.

Ilustrujte na obrázku.

2.19.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Načrtnite päť navzájom rôznych sietí kocky.

2. úloha

Koľko percent objemu kocky s hranou a = 6 cm zaberá guľa do nej vpísaná?

3. úloha

Rozmery kvádra a, b, c sú v pomere 5 : 9 : 13, veľkosť uhlopriečky podstavy je $\sqrt{424}$. Vypočítajte objem a povrch kvádra.

4. úloha

Určte povrch a objem kocky, ktorá je vpísaná do gule s polomerom r = 5 cm.

5. úloha

Do kocky s hranou a = 6 cm je vpísaný kužeľ tak, že jeho podstava je vpísaná do steny kocky. Vypočítajte povrch a objem tohto kužeľa.

2.20 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika: Kombinatorika, pravdepodobnosť

2.20.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Vysvetlite pojem faktoriál a objasnite jeho súvislosť s kombinačným číslom.

2. úloha

Objasnite pojem kombinačné číslo a objasnite jeho súvislosť s Pascalovým trojuholníkom. Charakterizujte vlastnosti kombinačných čísel a ukážte, ako sa prejavujú v Pascalovom trojuholníku.

3. úloha

Vysvetlite vzájomnú súvislosť pojmov permutácie a permutácie s opakovaním, variácie a variácie s opakovaním. Uveďte príklady a spôsob výpočtu.

4. úloha

Objasnite kombinatorické pravidlo súčtu, súčinu a vysvetlite princípy ich použitia.

5. úloha

Vysvetlite pojem náhodný jav, nezávislé javy a uveďte príklady.

6. úloha

Objasnite pojem pravdepodobnosť a „geometrická“ pravdepodobnosť a spôsob ich výpočtu.

2.20.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Koľkými spôsobmi možno odpovedať na 20 otázok v teste, ak:

a) ku každej otázke existujú 4 možné odpovede, z ktorých je práve jedna správna a tú vyberáme náhodne,

b) pri 10 otázkach poznáme správnu odpoveď a pri ostatných vieme vždy vylúčiť dve nesprávne odpovede a náhodne sa rozhodujeme už len medzi dvomi?

Svoje tvrdenia zdôvodnite.

2. úloha

Mama chce pre malú Terezku upliesť jednofarebný šál a dvojfarebnú čiapku s uškami. Na šál a čiapku potrebuje spolu dve veľké klbká vlny a na ušká stačí jedno malé klbko inej farby. Má k dispozícii tri malé klbká rôznych farieb a spolu 10 veľkých klbiek v piatich iných farbách, z každej v dostatočnom množstve. Koľko rôznych farebných kombinácií by bolo možné navrhnúť z dostupného materiálu? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3. úloha

Ak berieme do úvahy rok s 365 dňami, ukážte, že v triede s 23 žiakmi majú práve dvaja z nich narodeniny v rovnaký deň s pravdepodobnosťou vyššou ako 50 %. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

4. úloha

Dvere je možné otvoriť jedným z piatich kľúčov vo zväzku. Kľúče sa navzájom podobajú a nie sú označené. S využitím stromu logických možností určte, s akou pravdepodobnosťou otvoríme dvere:

a) hneď prvým kľúčom na prvý pokus,

b) tretím kľúčom na tretí pokus.

Svoje tvrdenie zdôvodnite.

5. úloha

Kolmo na ochrannú sieť so štvorcovými okami o veľkosti 5 cm krát 5 cm letí loptička s polomerom 2 cm. Aká je pravdepodobnosť, že cez sieť preletí? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.20.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Ste na výlete v horách a stojíte pod kopcom s lanovkou, ktorá premáva na jeho vrchol a späť. Zároveň naň vedú ďalšie tri cesty. Vymenujte všetky možnosti, ktorými sa môžete dostať na vrchol kopca a späť, ak:

a) nezáleží na tom, či sa vrátite rovnakým spôsobom, ako ste vyšli,

b) sa chcete vrátiť inou cestou, akou ste išli hore,

c) sa určite vrátite inou trasou, akou ste išli hore, ale vôbec nechcete ísť lanovkou,

d) ak sa na vrchol odveziete lanovkou a dole pôjdete peši ľubovoľnou z ciest.

2. úloha

V malej cukrárni podávajú päť druhov kávy, štyri druhy čaju, dva druhy limonády a osem druhov koláčikov. Vypočítajte, koľko je na výber možností, ak:

a) si objednáme jednu kávu, jednu limonádu a akýkoľvek jeden koláčik z ponuky,
b) chceme ochutnať najviac dva rôzne koláčiky a k tomu jeden konkrétny druh čaju,
c) si objednáme ľubovoľný nápoj okrem kávy a k nemu jeden ľubovoľný zákusok z troch obľúbených.

3. úloha

Janka má v skrini päť tričiek, troje nohavice, tri košele a dve sukne. Nikdy nenosí tričko spolu s košeľou. Koľko rôznych outfitov dokáže pomocou nich vytvoriť, ak:

a) by oblečenie kombinovala navzájom bez obmedzenia,
b) nosí k sukni rada iba košeľu a k nohaviciam iba tričko,
c) by si doplnila šatník o dvoje krátke nohavice a tie kombinovala s tričkami aj košeľami?

4. úloha

Pri obede v reštaurácii s kamarátom Vám donesú príbor pre oboch v štýlovej vysokej drevenej nádobe, kde nevidíte, čo je lyžica, vidlička a nôž.

a) Ak si vyberáte prvý, aká je pravdepodobnosť, že si vyberiete lyžicu na prvýkrát?
b) Ak si vyberáte prvý, aká je pravdepodobnosť, že si vyberiete lyžicu na prvýkrát a súčasne vidličku na druhýkrát?
c) Ak si najprv vyberie príbor kamarát a až potom Vy, aká je pravdepodobnosť, že si vyberiete ako prvú lyžicu?
d) Ak si vyberáte prvý, aká by bola pravdepodobnosť, že ako prvú vyberiete vidličku?

5. úloha

S akou pravdepodobnosťou by sa stretli dvaja priatelia v čase

a) medzi 18:00 a 19:00, ak by sa dohodli, že po príchode na miesto stretnutia každý počká na toho druhého maximálne 15 minút?
b) medzi 18:30 a 19:00, ak po príchode na miesto stretnutia každý počká na toho druhého maximálne 10 minút?

6. úloha

Z dlhodobých pozorovaní je známe, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,51.

Vypočítajte, s akou pravdepodobnosťou sa v trojdetnej rodine:

a) narodí viac dievčat ako chlapcov,

b) narodia tri dievčatá,

c) narodia práve traja chlapci.

2.21 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika: Štatistika

2.21.1 Úlohy na definíciu pojmov, ich vlastnosti a súvislosti medzi nimi

1. úloha

Objasnite pojmy základný súbor a výberový súbor a na príklade objasnite ich vzájomnú súvislosť. Vysvetlite myšlienku odhadu relatívnej frekvencie skúmaného znaku v základnom súbore pomocou jeho relatívnej frekvencie v súbore získanom náhodným výberom.

2. úloha

Charakterizujte pojmy stredná hodnota, modus, medián. Napíšte vzťah pre výpočet aritmetického priemeru.

3. úloha

Objasnite pojmy rozptyl a smerodajná odchýlka a uveďte vzťahy pre ich výpočet.

4. úloha

Vysvetlite pojem triedenie a jeho praktickú realizáciu. Uveďte, ktoré diagramy – grafy sa používajú pri grafickej reprezentácii spracovaných dát.

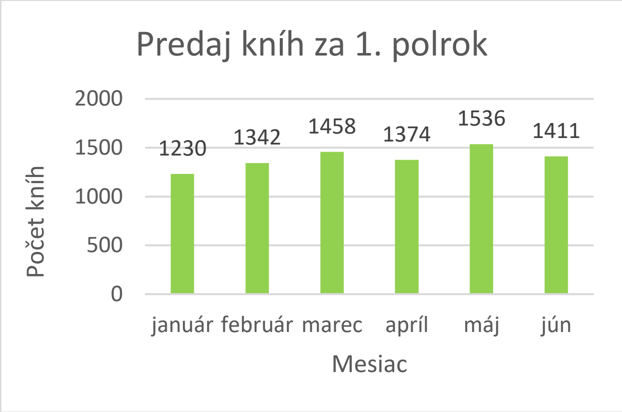
5. úloha

Objasnite pojem rozdelenie pravdepodobnosti a objasnite jeho súvislosť s realizáciou bernoulliovských pokusov.

2.21.2 Úlohy na argumentáciu a dôvodenie

1. úloha

Novootvorený obchod s knihami analyzoval výsledky predaja elektronických kníh za prvých šesť mesiacov roka. Graf na obrázku 13 ukazuje počty predaných titulov za jednotlivé mesiace.



Obr. 13

Vypočítajte priemerný počet e-kníh predaných za sledované obdobie. Ako sa zmenila priemerná hodnota za apríl až jún oproti priemeru za prvé tri mesiace? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2. úloha

V tabuľke 1 je uvedený týždňový prehľad hodnoty podielu hlbokého spánku z celkovej dĺžky spánku podľa monitoringu smart hodinkami.

Tab. 1

Deň	pondelok	utorok	streda	štvrtok	piatok	sobota	nedeľa
Podiel hlbokého spánku (%)	18	11	15	22	17	20	22

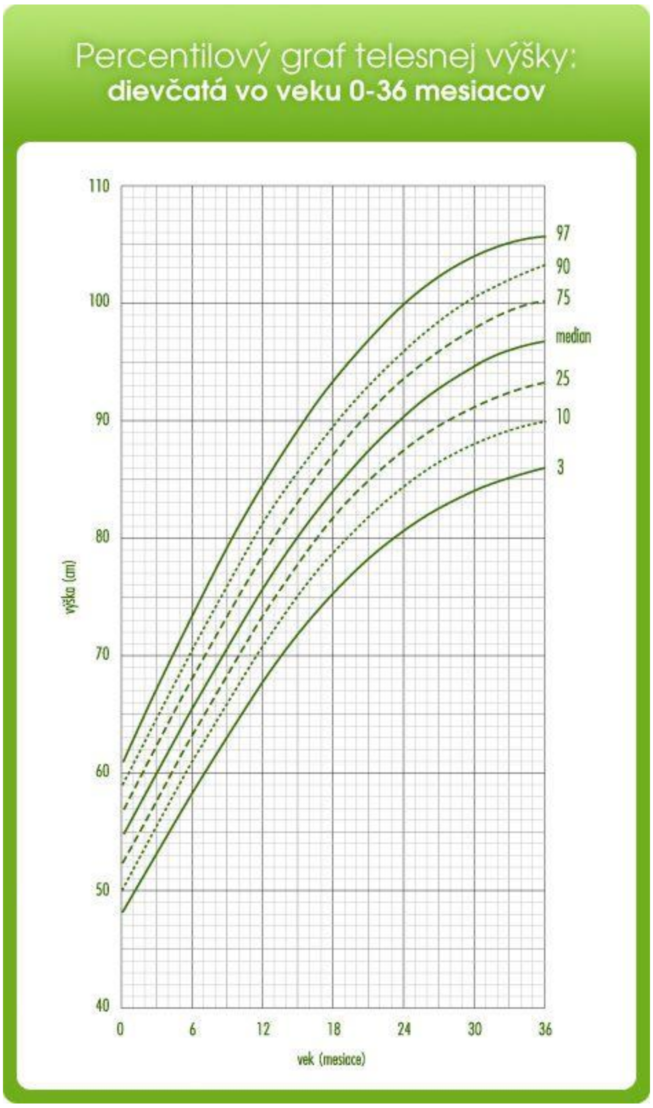
a) Určte strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku daného súboru.

b) Určte modus pre namerané údaje.

Svoje riešenia zdôvodnite.

3. úloha

Na obrázku 14 je zobrazený graf závislosti výšky dievčaťa od jeho veku. Určte medián výšky dievčat vo veku 3, 15 a 33 mesiacov. Svoje tvrdenie zdôvodnite.



Obr. 14 Zdroj https://babetko.rodinka.sk/babaetko-po-tyzdni/rastove-grafy/rastovy-graf-vyska-dievcat-vek-0-36-mesiacov/

4. úloha

V tabuľke na obrázku 15 je zoradený rebríček bodového hodnotenia výsledkov Svetového pohára v alpskom lyžovaní.

Alpské lyžovanie Svetový pohár - Ženy (14.01.2024)

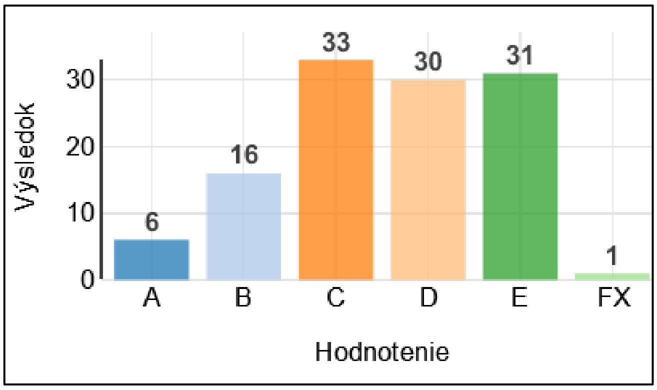
#	MENO	NÁRODNOSŤ	BODY
1.	Shiffrin Mikaela	USA	929
2.	Brignone Federica	Taliansko	787
3.	Gut-Behrami Lara ▲ +1	Švajčiarsko	749
4.	Vlhová Petra ▼ -1	Slovensko	722
5.	Goggia Sofia	Taliansko	582
6.	Hector Sara	Švédsko	458
7.	Gisin Michelle	Švajčiarsko	440
8.	Huetter Cornelia	Rakúsko	435
9.	Duerr Lena	Nemecko	350
10.	Grenier Valerie	Kanada	345
11.	Puchner Mirjam ▲ +4	Rakúsko	273
12.	Bassino Marta ▼ -1	Taliansko	264
13.	Liensberger Katharina ▼ -2	Rakúsko	262
14.	Moltzan Paula ▼ -1	USA	245
15.	Robinson Alice ▼ -1	Nový Zéland	232
16.	Lie Kajsa Vickhoff	Nórsko	229
17.	Gritsch Franziska ▲ +2	Rakúsko	220
18.	Flury Jasmine ▼ -1	Švajčiarsko	209
19.	Ljutic Zrinka ▼ -1	Chorvátsko	208
20.	Mowinckel Ragnhild ▲ +8	Nórsko	204

Obr. 15 Zdroj https://www.flashscore.sk/zimne-sporty/svetovy-pohar/alpske-lyzovanie-zeny/

Rozrieďte súťažiacich podľa národnosti a vytvorte príslušný histogram. Svoje riešenie zdôvodnite.

5. úloha

Úspešne absolvovaný predmet na univerzite je hodnotený známkou A, B, C, D, E (A – najlepšie, E – najhoršie). Ak je študent na skúške neúspešný, je hodnotený FX. Absolútne početnosti udeleného hodnotenia ukazuje histogram na obrázku 16. Ak sa skúšky z predmetu zúčastnilo celkovo 117 študentov, vypočítajte hodnoty relatívnych početností. Koľko percent študentov zvládlo predmet s hodnotením A až C? Svoje tvrdenie zdôvodnite.



Obr. 16

2.21.3 Úlohy na postup riešenia

1. úloha

Vo firme pracuje 16 zamestnancov vo veku 24 až 62 rokov. Dvaja zamestnanci sú vo veku 28 rokov, traja vo veku 34 rokov, jeden vo veku 24 rokov, štyria vo veku 36 rokov, traja majú 45 rokov a dvaja oslávili 50. Jediný najstarší má 62 rokov.

a) Vypočítajte priemerný vek zamestnancov.

b) Určte medián súboru.

c) Určte modus súboru.

d) Zistite, ako sa zmení priemerný vek zamestnancov firmy, ak najstarší z nich odíde do dôchodku a nastúpia dvaja noví vo veku 40 a 41 rokov.

2. úloha

Pri vstupe do obce ukazoval merač rýchlosti vozidiel hodnoty (v km/h) 50, 58, 52, 45, 50, 51, 52, 54, 46, 58, 49, 48, 54, 53, 60, 62, 57, 48, 50 a 50.

a) Aká bude stredná hodnota z nameraných hodnôt rýchlosti prechádzajúcich vozidiel?

b) Určte modus súboru hodnôt.

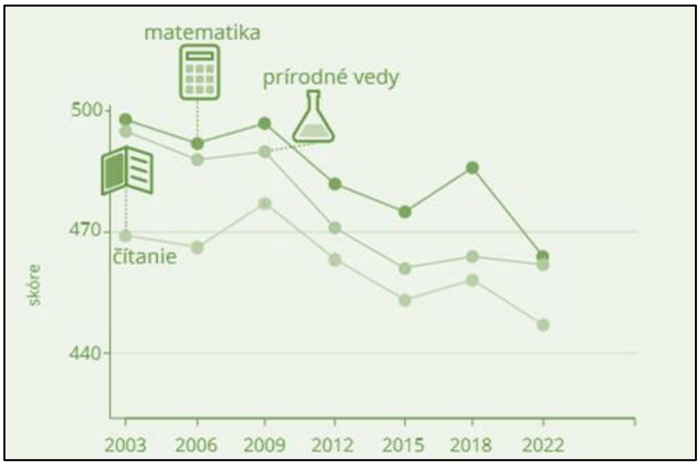
c) Koľko percent sledovaných áut dodržalo vo vyhláške požadovanú rýchlosť 50 km/h?

d) Koľko sledovaných áut prekročilo priemernú nameranú hodnotu?

e) Vypočítajte rozptyl a smerodajnú odchýlku daného súboru.

3. úloha

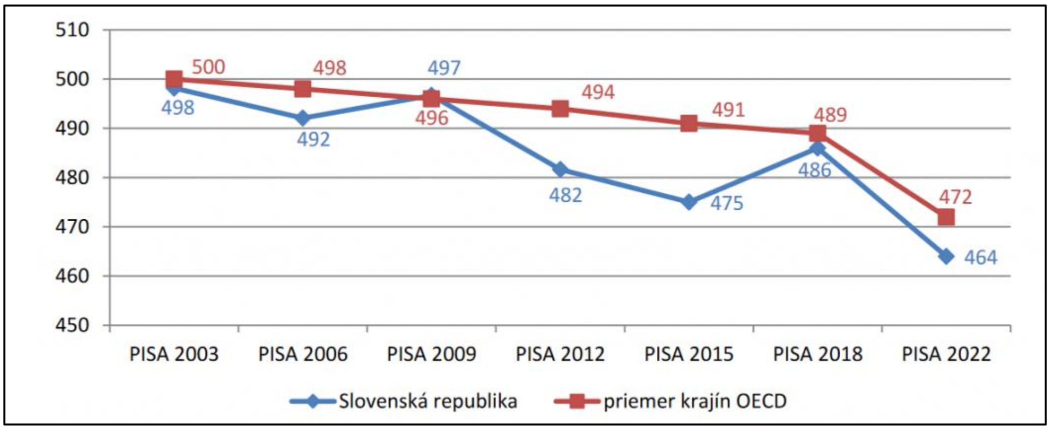
Graf na obrázku 17 znázorňuje výsledky testovania PISA v rámci trojročných cyklov a hodnotí výkon žiakov SR v matematike, čítaní a prírodných vedách.



Obr. 17 Zdroj: https://eraportal.sk/aktuality/zverejnenie-vysledkov-slovenskych-15-rocnych-ziakov-v-medzinarodnej-studii-oecd-pisa-2022/

a) Analyzujte výsledky testovania v rámci porovnávania jednotlivých predmetov. Vidno na grafoch jednoznačný trend?

b) Na základe obrázka 18 porovnajte a posúďte dosiahnuté bodové skóre z matematiky pre SR a priemer krajín OECD.



Obr. 18 Zdroj: https://www2.nucem.sk

4. úloha

Navrhnite prieskum, v ktorom by respondenti odpovedali na otázku, koľko domácností sa vo Vašom okolí stará aspoň o jedného domáceho miláčika, pričom sa bude rozlišovať druh zvieraťa. Zahrňte do otázky pre respondentov starostlivosť o psa, mačku, králika, rybičky a kategóriu iné. Ako by ste efektívne realizovali prieskum a vyhodnocovali získané údaje?

LITERATÚRA

Boucník, P. a kol.: *Zmaturuj! z matematiky 2*, 1. vyd. Brno: DIDAKTIS, s. r. o., 2006. 248 s. ISBN 80-7358-051-9.

Kohanová a kol.: *Matematika – Zbierka úloh pre stredné školy*, 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, s. r. o., 2011. 280 s. ISBN 978-80-8120-062-5.

Koreňová, L. – Jodas, V.: *Nová maturita z matematiky*, Bratislava: AKTUELL, 2005. 230 s. ISBN 80-89153-13-5.

Kubáček, Z. – Žabka, J.: *Matematika – pracovný zošit pre gymnáziá a stredné školy – 1. časť*, 1. vyd. Nitra: MAPA Slovakia Plus, s. r. o., 2023. 115 s. ISBN 978-80-8067-344-4.

Kubáček, Z. – Žabka, J.: *Seminár z matematiky – 1. časť*, 1. vyd. Nitra: MAPA Slovakia Plus, s. r. o., 2017. 239 s. ISBN 978-80-8067-309-3.

Kubáček, Z. – Žabka, J.: *Seminár z matematiky – 2. časť*, 1. vyd. Nitra: MAPA Slovakia Plus, s. r. o., 2018. 239 s. ISBN 978-80-8067-323-9.

Kubáček, Z. – Žabka, J.: *Seminár z matematiky – 3. časť*, 1. vyd. Nitra: MAPA Slovakia Plus, s. r. o., 2020. 268 s. ISBN 978-80-8067-334-5.

Kyselová, D. – Richtáriková, S.: *Matematika – pomôcka pre maturantov a uchádzačov o štúdium na vysokých školách*, Nitra: Enigma, 2006. 55 s. ISBN 80-85471-61-2.

Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky: *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky*, Bratislava, 2019. [cit. 2023-12-11]. Dostupné na Katalóg cieľových požiadaviek k maturitnej skúške (statpedu.sk).

Odvárko, O. – Kadleček, J.: *Přehled matematiky – pro základní školy a víceletá gymnázia*, 1. vyd. Praha: Prometheus, s. r. o., 2004. 270 s. ISBN 80-7196-276-7.

Polák, J.: *Středoškolská matematika v úlohách II*, 2. vyd. Praha: Prometheus, s. r. o., 2011. 655 s. ISBN 978-80-7196-419-3.